

**Université de Rennes 1—Année 2018/2019**  
**L3—PSIN/PRB—Feuille de TD 1**

**Exercice 1.** Soient  $\Omega$  un ensemble et  $A$  et  $B$  des parties de  $\Omega$ .  
Simplifier les expressions

$$E = (A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cap B^c) \quad \text{et} \quad F = (A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c).$$

**Exercice 2.** Soient  $\Omega$  un ensemble et  $A, B, C$  des parties de  $\Omega$ .  
Parmi les propositions suivantes, prouver celles qui sont vraies et donner des contre-exemples pour les autres :

1.  $(A \cup B = \Omega) \implies (A \subset B^c)$
2.  $(A \cup B = \Omega) \implies (A^c \subset B)$
3.  $(A \cup B = \Omega \text{ et } A \cap B = \emptyset) \implies (A = B^c)$
4.  $(A \subset B^c) \implies (A \cup B = \Omega)$
5.  $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ .

**Exercice 3.** Soit  $\Omega$  un ensemble ; pour toute partie  $A$  de  $\Omega$ , on rappelle que  $\mathbf{1}_A$  est la fonction indicatrice de  $A$ .

(i) Montrer que, pour toutes parties  $A, B$  de  $\Omega$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A \cap B} &= \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A \cap B}, \\ \mathbf{1}_{A^c} &= \mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_A, \quad \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{A^c} = 0, \quad \mathbf{1}_A \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A. \end{aligned}$$

(ii) Utiliser (i) pour simplifier les expressions

$$(A^c \cup B) \cap (A \cap B^c) \quad \text{et} \quad (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c).$$

**Exercice 4.** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles de cardinaux respectifs  $n$  et  $k$ . On note  $F^E$  l'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$ . Quel est le cardinal  $\text{Card}(F^E)$  de  $F^E$  ?

**Exercice 5.** Soit  $\Omega$  un ensemble. Décrire une bijection entre l'ensemble  $\mathcal{P}(\Omega)$  des parties de  $\Omega$  et  $\{0, 1\}^\Omega$ . Déterminer le cardinal  $\text{Card}(\mathbf{P}(\Omega))$  de l'ensemble  $\mathcal{P}(\Omega)$

**Exercice 6.** On jette 10 fois successivement une pièce de monnaie. Comment peut-on représenter le résultat d'une telle épreuve ? Combien a-t-on de résultats différents ? Dans combien de résultats obtient-on exactement trois piles ? Dans combien de résultats obtient-on au moins un pile ?

**Exercice 7.** Une urne contient 5 boules blanches numérotées de 1 à 5 et 8 boules noires numérotées de 6 à 13. On tire successivement 6 boules de l'urne ; à chaque fois, on note le numéro de la boule tirée et on la remet ensuite dans l'urne.

Comment peut représenter le résultat d'une telle épreuve ?

Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Dans combien de tirages obtient-on :

- (1) 1 boule noire au plus ?
- (2) 3 boules blanches exactement ?
- (3) 1 boule blanche au moins ?
- (4) 5 boules noires et une blanche, dans cet ordre ?
- (5) 5 boules noires et une blanche, dans n'importe quel ordre ?

**Exercice 8.** Reprendre l'exercice précédent en supposant cette fois que les boules ne sont pas remises dans l'urne après tirage.

**Exercice 9.** On dispose de 13 livres différents : 4 de mathématique, 6 de physique et 3 de chimie.

On les range au hasard. Combien de façons y a-t-il de les ranger sur une même étagère ?

Combien de façons y a-t-il de les ranger en regroupant les livres de mathématique ?

Combien de façons y a-t-il de les ranger en les regroupant par matière ?

**Exercice 10.** Vingt chevaux sont au départ d'une course et un parieur joue au tiercé.

- (i) Quel est le nombre de tiercés (dans l'ordre) qu'il peut jouer.
- (ii) Quel est le nombre de tiercés possibles si on ne tient pas compte de l'ordre.

**Exercice 11.** 30 étudiants sont soumis à un test d'aptitude. Pour coder ce test afin de le rendre anonyme, chaque étudiant indique sur la fiche-test les quatre chiffres correspondant au jour et au mois de sa naissance. Quelle est la probabilité que deux étudiants aient le même code ?

**Exercice 12.** Après une marée noire en Bretagne, l'organisme de protection des oiseaux de mer a évalué à 20 000 la population de sternes au large du Finistère. 500 d'entre eux ont été bagués. Un an après, on capture 100 sternes dans cette zone. Calculer la probabilité :

- (1) de ne pas avoir d'oiseau bagué ?
- (2) d'avoir au moins deux sternes baguées ?