Université de Rennes - Année 2019/2020

L3-PSIN/PRB – CC1 du 8/10/2019

Exercice 1 (5P.) Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et A, B des événements dans $\mathscr{F}$. On pose $a = \mathbf{P}(A)$, $b = \mathbf{P}(B)$, $c = \mathbf{P}(A \cap B)$, $d = \mathbf{P}(A \cup B)$.
(i) Montrer que $\max(0, a+b-1) \leq c$ et que $c \leq \min(a, b)$.
(ii) On suppose que A et B sont indépendants ; donner une expression de d en fonction de a et b.
(iii) On suppose que $a = 0$. Montrer que A et B sont indépendants.
(iv) On suppose que $a = 1$. Montrer que A et B sont indépendants.

Exercice 2 (5P.) On tire simultanément trois cartes au hasard dans un paquet de 32 cartes ; on suppose qu'il y a 4 couleurs (pique-coeur-carreau-trèfle) et 8 hauteurs (as-roi-dame-valet-dix-neuf-huit-sept).
(i) Décrire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ modélisant cette expérience aléatoire.
(ii) Quelle est la probabilité de n'obtenir que des coeurs ?
(iii) Quelle est la probabilité de n'obtenir que des as ?
(iv) Quelle est la probabilité d'obtenir deux coeurs et un pique ?

Exercice 3 (5P.) Un QCM comporte 5 questions, pour chacune desquelles 4 réponses sont proposées, une seule étant exacte.
(i) Un étudiant ne connaissant la réponse à aucune des questions choisit au hasard ses réponses. Décrire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ modélisant cette expérience aléatoire. Quelle est la probabilité pour qu'au moins 3 de ses réponses soient justes ?
(ii) On suppose que la proportion des étudiants connaissant la réponse à la 1ère question est 1/2. Les étudiants ignorant la réponse choisissent au hasard l'une des 4 réponses proposées à cette question. Sachant qu'un étudiant a donné la bonne réponse, quelle est la probabilité pour qu'il la connaisse vraiment ?

Exercice 4 (6P.) Un joueur effectue des lancers successifs d'une pièce de monnaie jusqu'à obtenir “Pile". On suppose qu'au k-ième lancer la probabilité d'obtenir “Pile" est $\frac{1}{k+1}$ pour tout $k \geq 1$.

Soit T la variable aléatoire égale au numéro du lancer où “Pile" apparaît pour la première fois.
(i) Calculer $\mathbf{P}(T = n)$ pour $n \geq 1$.
(ii) Quelle est la probabilité pour que “Pile" n'apparaisse jamais ? (On rappelle que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.)