Université de Rennes 1
Année 2019/2020
Licence de Mathématiques 3

19 Décembre 2019

PSI-PRB-Probabilités-Examen 1ère session

Durée : 120 minutes ; documents non permis - Barême indicatif

Questions de cours. (6P.)

(i) On considère une pièce équilibrée dont le côté pile est marqué 0 et le côté face est marqué 1 ainsi qu'un dé équilibré à 4 faces numérotés de 1 à 4. On les jette tous les deux.

(1) Donner un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ modélisant cette expérience.

(2) Soit S la somme des deux nombres obtenus. Donner la loi de S.

(ii) Deux producteurs fournissent des pommes à un primeur. Le premier producteur fournit 2 tonnes dont 3% sont véreuses, le second en fournit 3 tonnes dont 5% sont véreuses. Un client achète une pomme choisie au hasard.

On désigne par A l'évènement "La pomme achetée provient du premier producteur" et par D l'évènement "La pomme achetée est véreuse".

(1) Donner $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(A^c)$ ainsi que $\mathbf{P}(D|A)$ et $\mathbf{P}(D|A^c)$.

(2) Calculer la probabilité que la pomme achetée provienne du premier producteur sachant qu'elle est véreuse.

(iii) On sème un lot de 2 000 graines qui ont chacune une probabilité de 90% de germer au bout de 7 jours.

(1) Soit X le nombre de graines ayant germées après 7 jours. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.

(2) On sème un deuxième lot de 1 000 graines identiques aux premières. Soit Y le nombre de graines de ce deuxième lot ayant germées après 7 jours. Quelle est la loi de $X + Y$?

Exercice 1. (5P.) Dans un supermarché, il y a deux caisses, notées C_1 et C_2. Chaque soir, lors de la fermeture, N derniers clients se présentent. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(i) Que vaut $\mathbf{P}(N = n)$ pour $n \in \mathbf{N}$?

Soit $i \in \{1, 2\}$. On suppose aussi que, indépendamment les uns des autres, les clients choisissent de passer par la caisse C_i avec probabilité $p_i \in]0, 1[$. Soit X_i le nombre de clients passant par la caisse C_i.

(ii) Calculer $\mathbf{P}(X_i = k|N = n)$ pour des entiers naturels k et n.

(iii) Déterminer la loi de X_i et la reconnaître ; en déduire $\mathbb{E}(X_i)$.

Exercice 2. (4P.) Soit X une v.a.r. discrète sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ avec $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et dont la loi est donnée par $\mathbf{P}(X = -2) = \mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(X = 2) = 1/6$ et $\mathbf{P}(X = -1) = \mathbf{P}(X = 1) = 1/4$. Soit $Y = X^2$.
(i) Déterminer la loi de Y.
(ii) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y), en présentant le résultat sous forme de tableau.
(iii) Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
(iv) X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 3. (10P.) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire continue de densité f, donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{1+x} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } \ x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\end{cases},$$

pour un certain $a \in \mathbf{R}$.
(i) Déterminer a.
(ii) Calculer $\mathbf{P}(X = 1/2)$, $\mathbf{P}(\frac{1}{2} < X \leq 2)$ et $\mathbf{P}(\{X \leq 0\} \cup \{X \geq 1\})$.
(iii) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
(iv) Déterminer $\mathbb{E}(X+1)$ et $\mathbb{E}((X+1)^2)$
(v) Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$ à l'aide de (iv).

On définit une v.a.r. $Y : \Omega \to \mathbf{R}$ par $Y(\omega) = \frac{1}{X(\omega)}$ si $X(\omega) \neq 0$ et $Y(\omega) = 0$ sinon.
(vi) Calculer $\mathbf{P}(Y \leq y)$ pour tout $y \in \mathbf{R}$. (Indication : Considérer successivement les cas $y \leq 0$, $0 < y \leq 1$ et $y > 1$).
(vii) Déterminer la densité de Y.

On définit une v.a.r. $N : \Omega \to \mathbf{Z}$ par $N(\omega) = [Y(\omega)]$, où $[y]$ désigne la partie entière de $y \in \mathbf{R}$ (On rappelle que $[y]$ est l'unique entier $n \in \mathbf{Z}$ tel que $n \leq y < n+1$.)
(viii) Déterminer la loi de N.

On pose $Z := Y - N$. (On remarquera que $Z(\Omega) \subset [0,1[$.)
(ix) Soit $n \in \mathbf{Z}$ et $z \in [0,1[$. Calculer $\mathbf{P}(Z \leq z, N = n)$. (Indication : montrer que $\{Z \leq z, N = n\} = \{n \leq Y \leq z + n\}$.)
(x) (Bonus) Montrer que Z a la même fonction de répartition que X.