Université de Rennes 1
Année 2018/2019
Licence de Mathématiques 3

20 Décembre 2018

PSI-PRB-PROBABILITÉS-EXAMEN 1ÈRE SESSION

Durée : 120 minutes ; documents non permis - Barême indicatif

Questions de cours. (5P.) (i) On tire **simultanément** et au hasard 3 cartes dans un jeu de 32 cartes comportant quatre couleurs ("pique", "trèfle", etc) formées de 8 cartes chacune ("As", "Roi", etc). Décrire l'univers Ω de cette expérience aléatoire ainsi que la mesure de probabilité associée. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux "As" ?
(ii) On considère une urne contenant 10 boules, dont 4 boules blanches et 6 boules noires. On procède à deux tirages successifs d'une boule de l'urne. Décrire l'univers Ω de cette expérience aléatoire ainsi que la mesure de probabilité associée, dans les deux cas suivants :
-on remet la 1ère boule tirée ;
-on ne remet pas la 1ère boule tirée.
(iii) La production des pièces d'une usine contient 10% de pièces défectueuses. Un contrôle qualité est tel que si une pièce est bonne elle est acceptée avec probabilité 0,9 et si la pièce est mauvaise elle est refusée avec probabilité 0,8. Quelle est la probabilité qu'une erreur de contrôle se produise avec une pièce choisie au hasard.
(iv) Soit X une v.a.r qui suit une loi géométrique de paramètre p. Déterminer la loi de la v.a.r $Y = X - 1$.
(v) On lance un dé équilibré 900 fois de suite ; soit X la v.a.r donnant la **proportion** de "6" obtenus à l'issue de ces 900 lancers. Quelle est l'espérance et l'écart type de X ?

Exercice 1. (6P.) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathcal{F}$ deux évenements indépendants avec $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1/2$.
(i) Montrer que A^c et B sont indépendants.
(ii) Déduire de (i) que A^c et B^c sont indépendants.
(iii) Déterminer la loi de la v.a.r $X = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$.
(iv) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
(v) Soit $Y = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B$. Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
(vi) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y), en présentant le résultat sous forme de tableau. Les v.a.r X et Y sont elles indépendantes ?

Tourner la page s.v.p

Exercice 2. (5P.) On considère un lot d'ampoules électriques. On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que la durée de vie de chaque ampoule est une v.a.r T avec $\mathbf{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t \geq 0$.

(i) Déterminer la loi de T et la reconnaître. Déterminer la durée de vie moyenne $\mathbb{E}(T)$ et l'écart-type $\sigma(T)$.

On branche en série 2 ampoules issues du même lot et de durées de vie indépendantes T_1 et T_2. Soit U l'instant où au moins une des ampoules cesse de fonctionner.
(ii) Calculer $\mathbf{P}(U > t)$ pour $t \in \mathbf{R}$.
(iii) Déterminer la fonction de répartition de U et reconnaître sa loi.
(iv) On mesure la durée de vie des ampoules en mois. En prenant $\lambda = 1/10$, après combien de mois en moyenne au moins une des deux ampoules cessera-t-elle de fonctionner ?

Exercice 3. (7P.)

Soit $\alpha \in]2, +\infty[$ un paramètre réel fixé dans toute la suite. Soit X une v.a.r continue de densité f donnée par $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{t^{\alpha+1}} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } \ t < 1. \end{cases}$

(i) Montrer que f est bien une densité de probabilité.
(ii) Quelle est la probabilité de l'évènement $\{X \leq 0\}$?
(iii) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
(iv) Soit $x > 1$. Calculer $\mathbf{P}(X > x)$.
(v) Soit $a > 0$ fixé. Pour tout $x > 0$, on pose

$$\varphi(x) = \mathbf{P}(X > x + a | X > x).$$

Calculer $\varphi(x)$ et montrer que $x \mapsto \varphi(x)$ est une fonction croissante sur $]0, +\infty[$.
(vi) Interpréter (de manière succinte) le résultat (v) quand X représente une durée de vie.
(vii) Soit $Y = \ln_+(X)$, où $\ln_+(x)$ est définie par $\ln_+(x) = \ln x$ si $x > 0$ et $\ln_+(x) = 0$ sinon. Déterminer la fonction de répartition de Y et reconnaitre sa loi.

Exercice 4. (2P.) Dans un échantillon de 10 000 personnes d'une population donnée, on constate que 750 ont un taux de cholesterol anormal. Déterminer un intervalle de confiance, au risque de 5%, pour la proportion p de personnes ayant un taux de cholesterol anormal dans la population globale. (On rappelle qu'on a $\mathbf{P}(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ pour une v.a.r $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.)