Université de Rennes 1–Année 2019/2010

L3–PSIN/PRB–Feuille de TD 1

Exercice 1. Soient Ω un ensemble et A et B des parties de Ω.
Simplifier les expressions

$$E = (A\cup B)\cap(A^c\cup B)\cap(A\cap B^c) \qquad \text{et} \qquad F = (A\cup B)\cap(A^c\cup B)\cap(A\cup B^c).$$

Exercice 2. Soient Ω un ensemble et A, B, C des parties de Ω.
Parmi les propositions suivantes, prouver celles qui sont vraies et donner des contre-exemples pour les autres :

1. $(A \cup B = \Omega) \Longrightarrow (A \subset B^c)$
2. $(A \cup B = \Omega) \Longrightarrow (A^c \subset B)$
3. $(A \cup B = \Omega \;\text{ et }\; A \cap B = \emptyset) \Longrightarrow (A = B^c)$
4. $(A \subset B^c) \Longrightarrow (A \cup B = \Omega)$
5. $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.

Exercice 3. Soit Ω un ensemble ; pour toute partie A de Ω, on rappelle que $\mathbf{1}_A$ est la fonction indicatrice de A.
(i) Montrer que, pour toutes parties A, B de Ω, on a

$$\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B,\ \mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B},$$
$$\mathbf{1}_{A^c} = \mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_A,\ \mathbf{1}_A\mathbf{1}_{A^c} = 0,\ \mathbf{1}_A\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A.$$

(ii) Utiliser (i) pour simplifier les expressions

$$(A^c \cup B) \cap (A \cap B^c) \qquad \text{et} \qquad (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c).$$

Exercice 4. (i) Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et k. Déterminer (avec preuve) le cardinal $\mathrm{Card}(E \times F)$ du produit cartésien $E \times F$.
(ii) Soient $F_1, \dots, F_n$ des ensembles finis. Déterminer au moyen d'une récurrence $\mathrm{Card}(F_1 \times \cdots \times F_n)$.
(iii) Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et k. Soit $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F. Construire une bijection entre $\mathcal{F}(E, F)$ et le produit cartésien $F \times \cdots \times F$ (n-fois). En déduire $\mathrm{Card}(\mathcal{F}(E, F))$.

Exercice 5. Soit Ω un ensemble. Decrire une bijection entre l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω et $\mathcal{F}(\Omega, \{0, 1\})$. Déterminer $\mathrm{Card}(\mathbf{P}(\Omega))$.

Exercice 6. On jette 10 fois successivement une pièce de monnaie. Comment peut-on représenter le résultat d'une telle épreuve ? Combien a t-on de résultats différents ? Dans combien de résultats obtient-on trois piles successifs ? Dans combien de résultats obtient-on exactement trois piles ? Dans combien de résultats obtient-on au moins un pile ?

Exercice 7. Une urne contient 5 boules blanches numérotées de 1 à 5 et 8 boules noires numérotées de 6 à 13. On tire successivement 6 boules de l'urne ; à chaque fois, on note le numéro de la boule tirée et on la remet ensuite dans l'urne.
Comment peut représenter le résultat d'une telle épreuve ?
Combien y a-t-il de tirages possibles ?
Dans combien de tirages obtient-on :

(1) 1 boule noire au plus ?
(2) 3 boules blanches exactement ?
(3) 1 boule blanche au moins ?
(4) 5 boules noires et une blanche, dans cet ordre ?
(5) 5 boules noires et une blanche, dans n'importe quel ordre ?

Exercice 8. Reprendre l'exercise précédent en supposant cette fois que les boules ne sont pas remises dans l'urne après tirage.

Exercice 9. On dispose de 13 livres différents : 4 de mathématique, 6 de physique et 3 de chimie.
On les range au hasard. Combien de façons y a-t-il de les ranger sur une même étagère ?
Combien de façons y a-t-il de les ranger en regroupant les livres de mathématique ?
Combien de façons y a-t-il de les ranger en les regroupant par matière ?

Exercice 10. Cinq cartes d'un jeu de 52 cartes constituent la "main " d'un joueur de Poker.

(1) Combien y a-t-il de mains possibles ?
(2) Combien de ces mains contiennent exactement un As ?
(3) Combien de ces mains ne contiennent aucun As ?
(4) Combien de ces mains contiennent au moins un As ?

Exercice 11. (Formule de Vandermonde) Soient $p, q \in \mathbf{N}$ et $n \in \{0, 1, \ldots, p+q\}$. Montrer par dénombrement la formule

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{i,j:i+j=n} \binom{p}{i}\binom{q}{j}$$