

Exercice 1. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

(i) Justifier l'existence de I_n et établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n pour $n \in \mathbf{N}$.

(ii) Calculer I_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Soit X une v.a.r. qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

(iii) Calculer, pour tout $n \geq 1$, le moment $\mathbf{E}(X^n)$ d'ordre n de X .

Exercice 2. Des clients arrivent à un guichet de manière aléatoire. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $t > 0$, le nombre de clients arrivant entre les instants 0 et $t > 0$ est une v.a.r. N_t qui suit une loi de Poisson de paramètre αt .

Soit X_1 l'instant d'arrivée du premier client.

(i) Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(X_1 > t)$; en déduire que X_1 est une v.a. continue qui suit une loi exponentielle.

(ii) Calculer $\mathbf{E}(X_1)$ et $\text{Var}(X_1)$.

Pour $n \geq 1$, soit X_n l'instant d'arrivée du n -ième client.

(iii) Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(X_n > t)$ et en déduire la fonction de répartition de X_n .

(iv) Montrer que X_n est une v.a. continue et en déterminer une densité.

(v) En utilisant l'Exercice 1, calculer $\mathbf{E}(X_n)$ et $\text{Var}(X_n)$.

Exercice 3. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé; on suppose qu'il existe $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{F}$ tels $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $\mathbf{P}(\Omega_1) = \mathbf{P}(\Omega_2)$.

Pour $n \geq 1$, on considère les v.a.r. $X_{2n} = \mathbf{1}_{\Omega_1}$ et $X_{2n+1} = \mathbf{1}_{\Omega_2}$.

(i) Déterminer la loi de X_n .

(ii) Déduire de (i) que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_1$.

(iii) Calculer $\mathbf{P}(|X_{2n} - X_1| \geq 1)$.

(iv) Déduire de (iii) que $(X_n)_n$ ne converge pas en probabilité vers X_1 .

Exercice 4. Soit X une v.a.r. suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(1000, 0.03)$.

(i) Donner une approximation de $\mathbf{P}(X \leq 20)$, en approchant la loi de X par une loi de Poisson.

(ii) Donner une approximation de $\mathbf{P}(X \leq 20)$, en approchant la loi de X par une loi normale.

(iii) Essayer de calculer $\mathbf{P}(X \leq 20)$ avec votre calculatrice.