**Université de Rennes 1–Année 2017/2018**

**L3–Probabilités-Feuille de TD 8**

**Exercice 1.** Soit $X$ v.a.r continue de loi sur $[-1,1]$. Déterminer la loi de $Y = f(X)$ pour $f : ]-1,1[\to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}\log(\frac{1+x}{1-x})$.

**Exercice 2.** (i) Soit $X$ et $Y$ des v.a.r indépendantes, toutes deux de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Calculer la loi de la v.a.r $X/Y$.

(ii) Soit $Z$ une v.a.r distribuée selon la loi de Cauchy, c-à-d $Z$ est de densité donnée $f$ avec $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Déterminer la loi de la v.a.r. $1/Z$.

**Exercice 3.** Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.
(i) Justifier l'existence de $I_n$ et établir une relation de récurrence entre $I_{n+1}$ et $I_n$ pour $n \in \mathbf{N}$.
(ii) Calculer $I_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
Soit $X$ une v.a.r. qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
(iii) Calculer, pour tout $n \geq 1$, le moment $\mathbf{E}(X^n)$ d'ordre $n$ de $X$.

**Exercice 4.** Des clients arrivent à un guichet de manière aléatoire. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $t > 0$, le nombre de clients arrivant entre les instants 0 et $t > 0$ est une v.a.r. $N_t$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha t$.
Soit $X_1$ l'instant d'arrivée du premier client.
(i) Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(X_1 > t)$ ; en déduire que $X_1$ est une v.a. continue qui suit une loi exponentielle.
(ii) Calculer $\mathbf{E}(X_1)$ et $\mathrm{Var}(X_1)$.
Pour $n \geq 1$, soit $X_n$ l'instant d'arrivée du $n$-ième client.
(iii) Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(X_n > t)$ et en déduire la fonction de répartition de $X_n$.
(iv) Montrer que $X_n$ est une v.a. continue et en déterminer une densité.
(v) En utilisant l'Exercice 1, calculer $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathrm{Var}(X_n)$.

**Exercice 5.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé ; on suppose qu'il existe $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{F}$ tels $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $\mathbf{P}(\Omega_1) = \mathbf{P}(\Omega_2)$.
Pour $n \geq 1$, on considère les v.a.r. $X_{2n} = \mathbf{1}_{\Omega_1}$ et $X_{2n+1} = \mathbf{1}_{\Omega_2}$.
(i) Déterminer la loi de $X_n$.
(ii) Déduire de (i) que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_1$.
(iii) Calculer $\mathbf{P}(|X_{2n} - X_1| \geq 1)$.
(iv) Déduire de (iii) que $(X_n)_n$ ne converge pas en probabilité vers $X_1$.

**Exercice 6.** Soit $X$ une v.a.r. suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(1000, 0.03)$.
(i) Donner une approximation de $\mathbf{P}(X \leq 20)$, en approchant la loi de $X$ par une loi de Poisson.
(ii) Donner une approximation de $\mathbf{P}(X \leq 20)$, en approchant la loi de $X$ par une loi normale.
(iii) Essayer de calculer $\mathbf{P}(X \leq 20)$ avec votre calculatrice.