Université de Rennes 1–Année 2018/2019

L3—PSIN/PRB–Feuille de TD 7

Exercice 1. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et X une v.a.r. sur Ω à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose qu'il existe $q \in]0,1[$ tel que

$$\mathbf{P}(X = n) = q\mathbf{P}(X \geq n) \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathbf{N}.$$

(i) On pose $p_n := \mathbf{P}(X = n)$. Montrer que $p_{n+1} = (1-q)p_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
(ii) Déterminer la loi de X.

Exercice 2. Soit X une v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Soit $Y = 1/X$.
(i) Déterminer la loi de Y.
(ii) Calculer l'espérance de Y.

Exercice 3. Soient X et Y deux v.a.r indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et suivant toutes deux une même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Déterminer la loi de la v.a.r $Z = X + Y$.

Exercice 4. Soit X une v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Soit $Y = 1/(X+1)$.
(i) Déterminer la loi de Y.
(ii) Calculer l'espérance de Y.

Exercice 5. Soient X et Y deux v.a.r indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Déterminer la loi de la v.a.r $Z = X + Y$.

Exercice 6. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $X_1, \ldots, X_k$ des v.a.r. indépendantes prenant leurs valeurs dans $\{1, \ldots, N\}$ suivant la loi uniforme. Soient $Y = \max_{1 \leq i \leq k} X_i$ et $Z = \min_{1 \leq i \leq k} X_i$.
(i) Déterminer les fonctions de répartition de Y et Z ;
(ii) Déterminer les lois de Y et Z.

Exercice 7. Une pièce de monnaie amène “Pile” avec probabilité $p \in]0,1[$ et “Face” avec probabilité $q = 1 - p$. On effectue des lancers successifs de cette pièce. Soit X_i la v.a.r. égale à 1 si on obtient “Pile” au i-ème lancer et 0 sinon. Pour $r \geq 1$ fixé, soit T_r le nombre de lancers effectués jusqu'au obtenir exactement r fois “Pile”.
(i) Pour $n \geq r$, montrer que $\{T_r = n\} = \{S_{n-1} = r - 1\} \cup \{X_n = 1\}$, où $S_k = X_1 + \cdots + X_k$.
(ii) Déterminer la loi de T_r. Montrer que T_r possède une espérance et la déterminer.