Université de Rennes 1–Année 2017/2018

L3–Probabilités–Feuille de TD 7

Exercice 1. Soit X une v.a.r suivant la loi uniforme sur $[-1, 1]$. Montrer que $Y = X^2$ suit une loi continue dont on déterminera la densité.

Exercice 2. Soit X une v.a.r suivant la loi uniforme sur $[0, \pi]$. Montrer que $Y = \cos(X)$ suit une loi continue dont on déterminera la densité.

Exercice 3. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t \mapsto \dfrac{1}{2}e^{-|t|}$.
(i) Montrer que f définit une densité de probabilité (c-à-d $f \geq 0$, f est continue sauf en au plus un nombre fini de points et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ existe et est égale à 1).
Soit X une v.a.r de densité f.
(ii) Calculer la fonction de répartition F_X de X.
(iii) Montrer que $\mathbf{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$ existent et les calculer.

Exercice 4. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(t) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ pour tout $t \in]0, 1[$ et $f(t) = 0$ si $t \notin]0, 1[$.
(i) Montrer que f définit une densité de probabilité.
Soit X une v.a.r de densité f.
(ii) Calculer la fonction de répartition F_X de X.
(iii) Montrer que $\mathbf{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$ existent.

Exercice 5. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t \mapsto \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.
(i) Montrer que f définit une densité de probabilité.
Soit X une v.a.r de densité f.
(ii) Calculer la fonction de répartition F_X de X.
(iii) Montrer que X ne possède pas d'espérance.

Exercice 6. Pour $n \geq 1$, on considère une v.a.r X_n suivant la loi uniforme sur $\{k/n \ : \ k = 0, \dots, n\}$. Montrez que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 7. Supposons que vous ayez en moyenne deux accrochages par an avec votre voiture. Devez-vous prévoir plus de deux constats à l'amiable pour les prochains 18 mois ?

Exercice 8. Dans un bureau de vote, une urne contient 1000 bulletins, dont 5% sont nuls. On prend 100 bulletins au hasard. Soit X la v.a.r égale au nombre de bullletins nuls contenus dans cet échantillon.
(i) Décrire la loi de X.
(ii) Approcher la loi de X par une loi binomiale, puis par une loi de Poisson et en déduire une valeur approchée des probabilités $\mathbf{P}(X \leq 5)$ et $\mathbf{P}(X = 0)$.