Université de Rennes 1–Année 2017/2018

L3–Probabilités de base–Feuille de TD 6

Exercice 1. Une pièce de monnaie amène "Pile" avec probabilité $p \in]0,1[$ et "Face" avec probabilité $q = 1 - p$. On effectue des lancers successifs de cette pièce. Soit X_i la v.a.r. égale à 1 si on obtient "Pile" au i-ème lancer et 0 sinon. Pour $r \geq 1$ fixé, soit T_r le nombre de lancers effectués jusqu'au obtenir exactement r fois "Pile".
(i) Pour $n \geq r$, montrer que $\{T_r = n\} = \{S_{n-1} = r - 1\} \cup \{X_n = 1\}$, où $S_k = X_1 + \cdots + X_k$.
(ii) Déterminer la loi de T_r. Montrer que T_r possède une espérance et la déterminer.

Exercice 2. À un péage autoroutier n voitures franchissent, au hasard et indépendamment les unes des autres, l'une des trois barrières numérotées $1, 2, 3$ mises à leur disposition. Soient X_1, X_2 et X_3 les v.a.r dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières.
(i) Déterminer la loi de X_1.
(ii) Calculer les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2$.
(iii) En déduire la covariance de X_1 et X_2.

Exercice 3. Soient X et Y deux v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ possédant toutes deux un moment d'ordre 2. On suppose que $\mathrm{Var}(X) > 0$. Déterminer $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tels que la quantité $\mathbf{E}\left((Y - (aX + b))^2\right)$ soit minimale.

Exercice 4. Soit X une v.a.r suivant la loi uniforme sur $[a, b]$ et soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$. Déterminer la loi de la v.a.r $Y = \alpha X + \beta$.

Exercice 5. (i) Soit X une v.a.r suivant une loi exponentielle de paramère λ. Déterminer la loi de la partie entière $[X]$ de X.

On dit qu'une v.a.r X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est sans mémoire si $\mathbf{P}(X > t + s | X > s) = \mathbf{P}(X > t)$ pour tous t, s.
(ii) Montrez que si une v.a.r X suit une loi exponentielle, alors X est sans mémoire.
(iii) Montrez que si une v.a.r X est positive, sans mémoire et à densité, alors X suit une loi exponentielle.

Exercice 6. Soit X une v.a.r suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $Y = X^2$.
(i) Déterminer une densité g de Y. On dit que Y suit une *loi du* χ^2 *à un degré de liberté*
(ii) Calculer, en justifiant leur existence, $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.