

Université de Rennes 1—Année 2016/2017

L2—Probabilités de base—Feuille de TD 6

Exercice 1. À un péage autoroutier n voitures franchissent, au hasard et indépendamment les unes des autres, l'une des trois barrières numérotées 1, 2, 3 mises à leur disposition. Soient X_1, X_2 et X_3 les v.a.r dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières.

- (i) Déterminer la loi de X_1 .
- (ii) Calculer les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2$.
- (iii) En déduire la covariance de X_1 et X_2 .

Exercice 2. Soient X et Y deux v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ possédant toutes deux un moment d'ordre 2. On suppose que $\text{Var}(X) > 0$. Déterminer $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tels que la quantité $\mathbf{E}((Y - (aX + b))^2)$ soit minimale.

Exercice 3. Soit X une v.a.r suivant la loi uniforme sur $[a, b]$ et soit $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$. Déterminer la loi de la v.a.r $Y = \alpha X + \beta$.

Exercice 4. (i) Soit X une v.a.r suivant une loi exponentielle de paramètre λ . Déterminer la loi de la partie entière $[X]$ de X .

On dit qu'une v.a.r X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est sans mémoire si $\mathbf{P}(X > t + s | X > s) = \mathbf{P}(X > t)$ pour tous t, s .

- (ii) Montrez que si une v.a.r X suit une loi exponentielle, alors X est sans mémoire.
- (iii) Montrez que si une v.a.r X est positive, sans mémoire et à densité, alors X suit une loi exponentielle.

Exercice 5. Soit X une v.a.r suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $Y = X^2$.

- (i) Déterminer une densité g de Y . On dit que Y suit une *loi du χ^2 à un degré de liberté*
- (ii) Calculer, en justifiant leur existence, $\mathbf{E}(Y)$ et $\text{Var}(Y)$.