Université de Rennes 1–Année 2015/2016

L2–Probabilités de base–Feuille de TD 5

Exercice 1. Soit X une v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbf{N}$. Montrer que X possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > n)$ converge et qu'alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > n).$$

Exercice 2. Soient X et Y deux v.a.r indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et suivant toutes deux une même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Déterminer la loi de la v.a.r $Z = X + Y$.

Exercice 3. Soient X et Y deux v.a.r indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Déterminer la loi de la v.a.r $Z = X + Y$.

Exercice 4. Soit X une v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.

Exercice 5. Soit X une v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$.

Exercice 6. Soient X et Y deux v.a.r à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que

$$\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{a}{i!j!} \qquad \text{pour tout} \quad (i, j) \in \mathbf{N}^2.$$

(i) Déterminer la valeur de a.
(ii) Quelles sont les lois marginales de X et de Y?
(iii) X et Y sont elles indépendantes ?