Université de Rennes 1–Année 2017/2018

L3–Probabilités–Feuille de TD 5

Exercice 1. Soient X et Y deux v.a.r indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et suivant toutes deux une même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Déterminer la loi de la v.a.r $Z = X + Y$.

Exercice 2. Soient X et Y deux v.a.r indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Déterminer la loi de la v.a.r $Z = X + Y$.

Exercice 3. Soit X une v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

Exercice 4. Soit X une v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

Exercice 5. Soient X et Y deux v.a.r à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que

$$\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{a}{i!j!} \qquad \text{pour tout} \quad (i, j) \in \mathbf{N}^2.$$

(i) Déterminer la valeur de a.
(ii) Quelles sont les lois marginales de X et de Y?
(iii) X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 6. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires avec $X(\Omega) = \{-1, 1\}, Y(\Omega) = \{1, 2\}$ et tel que

$$\mathbf{P}(X = -1) = 1/4, \quad \mathbf{P}(Y = 1) = 1/3.$$

Posons $p = \mathbf{P}(X = -1, Y = 1)$.
(i) Exprimer en fonction de p la loi conjointe de X et Y et présenter le résultat sous forme d'un tableau.
(ii) Quelles conditions doit-on imposer à p?
(iii) Déterminer p pour que X et Y soient indépendantes.
(iv) Calculer $\mathbb{E}(XY)$ quand p est comme dans (iii).