Université de Rennes 1–Année 2016/2017

L2–Probabilités de base–Feuille de TD 5

Exercice 1. Soient X et Y deux v.a.r indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et suivant toutes deux une même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Déterminer la loi de la v.a.r $Z = X + Y$.

Exercice 2. Soient X et Y deux v.a.r indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Déterminer la loi de la v.a.r $Z = X + Y$.

Exercice 3. Soit X une v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Calculer $\mathbb{E}\left(1/X\right)$.

Exercice 4. Soit X une v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Calculer $\mathbb{E}\left(1/(X+1)\right)$.

Exercice 5. Soient X et Y deux v.a.r à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que

$$\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{a}{i!j!} \qquad \text{pour tout} \quad (i, j) \in \mathbf{N}^2.$$

(i) Déterminer la valeur de a.
(ii) Quelles sont les lois marginales de X et de Y?
(iii) X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 6. Une pièce de monnaie amène “Pile” avec probabilité $p \in]0, 1[$ et “Face” avec probabilité $q = 1 - p$. On effectue des lancers successifs de cette pièce. Soit X_i la v.a.r. égale à 1 si on obtient “Pile” au i-ème lancer et 0 sinon. Pour $r \geq 1$ fixé, soit T_r le nombre de lancers effectués jusqu'au obtenir exactement r fois “Pile”.
(i) Pour $n \geq r$, montrer que $\{T_r = n\} = \{S_{n-1} = r - 1\} \cup \{X_n = 1\}$, où $S_k = X_1 + \cdots + X_k$.
(ii) Déterminer la loi de T_r. Montrer que T_r possède une espérance et la déterminer.