**Université de Rennes 1–Année 2017/2018**

**L3–Probabilités–Feuille de TD 4**

**Exercice 1.** Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une hasard et on considère les évènements :

$A =$ «le numéro tiré est pair» et $B =$ «le numéro tiré est un multiple de 3».

(i) Les évènements $A$ et $B$ sont-ils indépendants ?

(ii) Répondre à la question (i) avec une urne contenant 13 boules.

**Exercice 2.** Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A, B, C \in \mathcal{F}$ trois évènements.

On suppose que $A$ et $B$ sont indépendants ainsi que $A$ et $C$. Montrer, par un contre-exemple, que les évènements $A$ et $B \cup C$ ne sont pas nécessairement indépendants. Même question pour $A$ et $B \cap C$.

**Exercice 3.** Une entreprise décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

(i) Quatre lettres sont envoyées à quatre clients : quelle est la probabilité des événements :

$A$ : «Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent».

$B$ : «Exactement 2 clients reçoivent une lettre au tarif urgent».

(ii) Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres. Quelle est la loi de probabilité de $X$? Quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

**Exercice 4.** On dispose de trois urnes et de trois boules. On place chacune des boules au hasard dans l'une des urnes. Soit $X$ la v.a.r égale au nombre d'urnes qui ne sont pas vides. Déterminer la loi de $X$ et sa fonction de répartition.

**Exercice 5.** Un trousseau de $n$ clefs contient une seule clef ouvrant une serrure donnée. On les essaie l'une après l'autre au hasard. Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires.

(i) Calculer la loi, l'espérance et la variance de $X$.

(ii) On réessaie à chaque fois une clef au hasard sans avoir nécessairement écarté la précédente. Répondez à la question (i).

**Exercice 6.** Un joueur jette simultanément deux dés. A l'issue du jeu, il gagne une somme $X$ égale à la différence entre le plus grand et le plus petit des points marqués.

(i) Déterminer la loi de la v.a.r $X$ ainsi que sa fonction de répartition $F_X$. Tracer le graphe de $F_X$.
(ii) Calculer l'espérance et la variance de $X$.

**Exercice 7.** Soit $N \geq 1$ un entier. Une urne contient $N$ boules numérotées de 1 à $N$. On effectue $n \geq 1$ tirages successifs avec remise. Soit $X$ la v.a.r égale au plus grand des numéros obtenus.

Déterminer la fonction de répartition de $X$. En déduire la loi de $X$.

**Exercice 8.** Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A, B \subset \mathcal{F}$ deux évènements. On considère la v.a.r. $X$ sur $\Omega$ définie par $X(\omega) = 1$ si $\omega$ réalise un et un seul des évènements $A$ ou $B$ et $X(\omega) = 0$ sinon. On pose $p_1 = \mathbf{P}(A)$, $p_2 = \mathbf{P}(B)$, $p_3 = \mathbf{P}(A \cap B)$.

Déterminer la loi de $X$ ainsi que son espérance et sa variance, en fonction de $p_1, p_2, p_3$.

**Exercice 9.** Soient $X$ une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p$ et $P \in \mathbf{R}[x]$ un polynôme. Montrer que

$$P(X) = (P(1) - P(0))X + P(0)$$

et en déduire l'espérance et la variance de $X$.

**Exercice 10.** Soient $a \neq b$ deux nombres réels non nuls, $X$ une v. a. r. de loi uniforme sur $\{-a, a, b, -b\}$ et $Y = X^2$. Calculer les variances de $X$, $Y$ et $X + Y$ respectivement. Les v.a.r. $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 11.** Soient $X$ et $Y$ deux v. a. r indépendantes suivant toutes les deux une loi de Bernoulli de paramètre $p$. On note $q = 1 - p$, $S = X + Y$ et $D = X - Y$. Déterminer les loi de $S$ et $D$ ainsi que leurs espérances et variances. Calculer $\mathbf{E}[SD]$. Les variables $S$ et $D$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 12.** Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $X_1, \ldots, X_k$ des v.a.r. indépendantes prenant leurs valeurs dans $\{1, \ldots, N\}$ suivant la loi uniforme. Montrer que $Y = \max_{1 \leq i \leq k} X_i$ et $Z = \min_{1 \leq i \leq k} X_i$ sont des v.a.r. et donner leurs lois.