Université de Rennes 1–Année 2016/2017

L2–Probabilités de base–Feuille de TD 4

Exercice 1. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et A et B des évènements dans $\mathcal{F}$ tels que $\mathbf{P}(A) > 0, \mathbf{P}(B) > 0$ et $A \cap B = \emptyset$.
(i) Montrer que A et B ne sont pas indépendants.
(ii) Montrer que A n'est pas indépendant avec lui-même.

Exercice 2. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A, B, C \in \mathcal{F}$ trois évènements.

On suppose que A et B sont indépendants ainsi que A et C. Montrer, par un contre-exemple, que les évènements A et $B \cup C$ ne sont pas nécessairement indépendants. Même question pour A et $B \cap C$.

Exercice 3. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ des évènements mutuellement indépendants. Pour chaque $i = 1, \ldots, n$, soit $B_i = A_i$ ou $B_i = A_i^c$. Montrer que $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ sont des évènements mutuellement indépendants.

Exercice 4. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ des évènements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne soit réalisé est inférieure à $\exp(-\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i))$.
Indication : Utiliser l'Exercice 3.

Exercice 5. On dispose de trois urnes et de trois boules. On place chacune des boules au hasard dans l'une des urnes. Soit X la v.a.r égale au nombre d'urnes qui ne sont pas vides. Déterminer la loi de X et sa fonction de répartition.

Exercice 6. Un joueur jette simultanément deux dés. A l'issue du jeu, il gagne une somme X égale à la différence entre le plus grand et le plus petit des points marqués.
(i) Déterminer la loi de la v.a.r X ainsi que sa fonction de répartition F_X. Tracer le graphe de F_X.
(ii) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 7. Soit $n \geq 1$ un entier. Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire simultanément n boules. Soit X la v.a.r égale au nombre de boules rouges obtenues. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 8. Soit $N \geq 1$ un entier. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On effectue $n \geq 1$ tirages successifs avec remise. Soit X la v.a.r égale au plus grand des numéros obtenus.

Déterminer la fonction de répartition de X. En déduire la loi de X.

Exercice 9. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A, B \subset \mathcal{F}$ deux évènements. On considère la v.a.r. X sur Ω définie par $X(\omega) = 1$ si ω réalise un et un seul des évènements A ou B et $X(\omega) = 0$ sinon. On pose $p_1 = \mathbf{P}(A)$, $p_2 = \mathbf{P}(B)$, $p_3 = \mathbf{P}(A \cap B)$.

Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance, en fonction de p_1, p_2, p_3.

Exercice 10. Soient X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p et $P \in \mathbf{R}[x]$ un polynôme. Montrer que

$$P(X) = (P(1) - P(0))X + P(0)$$

et en déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 11. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et X une v.a.r. sur Ω à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose qu'il existe $q \in]0, 1[$ tel que

$$\mathbf{P}(X = n) = q\mathbf{P}(X \geq n) \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Déterminer la loi de X.

Exercice 12. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de v.a.r. sur Ω. Soit N une v.a.r sur Ω à valeurs dans $\mathbf{N}$. On définit $Y : \Omega \to \mathbf{R}$ par $Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Montrer que Y est une v.a.r. sur Ω.

Exercice 13. Soient $a \neq b$ deux nombres réels non nuls, X une v. a. r. de loi uniforme sur $\{-a, a, b, -b\}$ et $Y = X^2$. Calculer les variances de X, Y et $X + Y$ respectivement. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 14. Soient X et Y deux v. a. r indépendantes suivant toutes les deux une loi de Bernoulli de paramètre p. On note $q = 1 - p$, $S = X + Y$ et $D = X - Y$. Déterminer les loi de S et D ainsi que leurs espérances et variances. Calculer $\mathbf{E}[SD]$. Les variables S et D sont-elles indépendantes ?

Exercice 15. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $X_1, \ldots, X_k$ des v.a.r. indépendantes prenant leurs valeurs dans $\{1, \ldots, N\}$ suivant la loi uniforme. Montrer que $Y = \max_{1\leq i\leq k} X_i$ et $Z = \min_{1\leq i\leq k} X_i$ sont des v.a.r. et donner leurs lois.