Université de Rennes 1–Année 2016/2017

L2–Probabilités de base–Feuille de TD 3

Exercice 1. On considère un jeu de 32 cartes. On en distribue 5 au hasard à chacun des deux joueurs A et B.
(i) Calculer la probabilité pour que A ait au moins un as.
(ii) Sachant que B a exactement un as, calculer la probabilité pour que A ait au moins un as.

Exercice 2. Deux joueurs A et B s'exercent au tir à l'arc. Le joueur A ne tire qu'une fois sur 3 et atteint sa cible 9 fois sur 10 quand il tire. Le joueur B, moins adroit, n'atteint sa cible que 6 fois sur 10. Un des joueurs tire.
(i) Quelle est la probabilité pour que la cible soit atteinte ?
(ii) Sachant que la cible est atteinte, quelle est la probabilité pour que ce soit par B?

Exercice 3. Une urne contient 4 boules rouges et 3 vertes.
(i) On tire successivement sans remise deux boules dans l'urne. Sachant qu'au premier tirage, on a obtenu une boule rouge, quelle est la probabilité qu'on obtienne une boule verte au deuxième tirage ?
(ii) Répondre à la même question quand on suppose que le tirage se fait avec remise.

Exercice 4. Dans une usine, 1% des articles produits sont défectueux. Un contrôle de qualité permet de rejeter 95% des articles lorsqu'ils sont défectueux mais aussi de rejeter 2% des articles qui ne le sont pas.
(i) Quelle est la probabilité qu'il y ait un erreur dans le contrôle de qualité ?
(ii) Quelle est la probabilité pour qu'un article accepté soit en réalité défectueux ?

Exercice 5. Dans un étang, il y a des poissons rouges et des poissons verts. Les poissons trop petits sont remis à l'eau par les pêcheurs. On estime qu'il y a 60 % de poissons rouges dans l'étang, que la moitié des poissons rouges et le tiers des poissons verts sont trop petits.
(i) Quelle est la probabilité de pêcher un poisson trop petit ?
(ii) Sachant qu'on a pêché un poisson trop petit, quelle est la probabilité que ce soit un poisson rouge ?

Exercice 6. On dispose de 2 urnes U_1 et U_2 contenant 100 boules en tout. L'urne U_1 contient 40 boules dont 8 sont blanches et 32 noires ; l'urne U_2 contient 60 boules dont 6 sont blanches et 54 noires. On choisit au hasard une urne et on en tire une boule. Soient A_i l'évènement "l'urne choisie est U_i" pour $i = 1, 2$ et A l'événement "la boule est blanche".
(i) Calculer $\mathbf{P}(A|A_1), \mathbf{P}(A|A_2)$ et $\mathbf{P}(A)$.
(ii) On constate qu'on a tiré une boule blanche. Qu'elle est la probabilité qu'elle provient de l'urne U_2.

Exercice 7. On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs de la façon suivante : on tire une boule de l'urne, on la remet en y ajoutant une boule de la même couleur que la boule qui a été tirée.

Pour $k \geq 1$, on considère les évènements
N_k : "une boule noire apparaît au k-ième tirage" et
A_k : "une boule blanche apparaît pour la 1ère fois au k-ième tirage"
(i) Calculer les probabilités de A_1 et de N_1 et, pour $k \geq 2$, les probabilités conditionnelles $\mathbf{P}(N_k|N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1})$ et $\mathbf{P}(N_k^c|N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1})$.
(iii) Soit $n \geq 1$. Calculer la probabilité $\mathbf{P}(A_n)$.

Exercice 8. On considère $n \geq 1$ individus $A_1, \ldots, A_n$. On lance une pièce de monnaie et on transmet le résultat ("Pile" ou "Face") à A_1. Le résultat est transmis par A_1 à A_2, ensuite par A_2 à A_3, etc. On suppose que tous ces individus mentent avec la probabilité p et qu'ils le font de manière mutuellement indépendante.
(i) Quelle est la probabilité p_n que le résultat reçu par A_n soit le bon ?
(ii) Quelle est la limite $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$?