Université de Rennes 1–Année 2016/2017

L2–Probabilités de base–Feuille de TD 2

Exercice 1. On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée. Expliciter l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ qui modélise cette expérience aléatoire.

- Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une fois face ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois face ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir pile au 1er lancer et au moins une fois face lors des deux suivants ?

Exercice 2. Soient$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité et $(A_1,\, A_2,\, A_3) \in \mathcal{F}^3$. On pose, pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, $p_i = \mathbf{P}(A_i)$, $p_{ij} = \mathbf{P}(A_i \cap A_j)$ et $p_{123} = \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Exprimez en fonction de ces probabilités les probabilités suivantes :

1) les trois évènements se réalisent ; 2) au moins l'un des évènements se réalise ; 3) au moins deux des évènements se réalisent ; 4) A_1 seul se réalise ; 5) A_1 et A_2 se réalisent mais pas A_3 ; 6) deux évènements au plus se réalisent ; 7) un seul évènement se réalise ; 8) deux évènements seulement se réalisent ; 9) deux évènements ou plus se réalisent ; 10) aucun des trois évènements ne se réalise.

Exercice 3. (i) Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un « six » ?

(ii) Même question avec deux dés pour obtenir un « double-six »

(iii) Quel est l'évènement le plus probable : obtenir au moins un « six » en lançant 4 fois un dé ou bien obtenir au moins un « double-six » en lançant 24 fois une paire de dés ?

Exercice 4. Au loto, on tire six numéros entre 1 et 49, deux-à-deux distincts et sans tenir compte de leur ordre. Calculez les probabilités des évènements suivants, pour $0 \leq k \leq 6$:

- "Avoir exactement k bons numéros"
- "Avoir zéro, un ou deux bons numéros"
- "Avoir au moins trois bons numéros"

Exercice 5. Pour $r \leq n$, on répartit aléatoirement r boules à l'intérieur de n urnes, chaque urne pouvant contenir plusieurs boules. Expliciter l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ qui modélise cette expérience aléatoire.

(i) Déterminer la probabilité de l'évènement « chaque urne contient au plus une boule ».

(ii) Déterminer la probabilité de l'évènement « il existe une urne contenant au moins deux boules ».

Exercice 6. Une urne contient N boules, dont N_1 sont blanches et N_2 noires. On opère à des tirages successifs avec remise. Soient $n \geq 1$ et $k \leq n$.

(i) Quelle est la probabilité que la première boule blanche tirée apparaisse lors du n-ième tirage ?

(ii) Quelle est la probabilité que la k-ième boule blanche tirée apparaisse lors du n-ième tirage ?