

Université de Rennes 1—Année 2018/2019  
L3—PSIN/PRB—Feuille de TD 10

**Exercice 1.** Soit  $X$  une v.a.r suivant la loi uniforme sur  $[0, \pi]$ . Montrer que  $Y = \cos(X)$  suit une loi continue dont on déterminera la densité.

**Exercice 2.** Soit  $X$  v.a.r continue de loi sur  $[-1, 1]$ . Déterminer la loi de  $Y = f(X)$  pour  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $f(x) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ .

**Exercice 3.** Soit  $X$  une v.a.r suivant la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ . On pose  $Y = X^2$ .

- (i) Déterminer une densité  $g$  de  $Y$ . On dit que  $Y$  suit une *loi du  $\chi^2$  à un degré de liberté*
- (ii) Calculer, en justifiant leur existence,  $\mathbb{E}(Y)$  et  $\text{Var}(Y)$ .

**Exercice 4.** Pour  $n \in \mathbf{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ .

- (i) Justifier l'existence de  $I_n$  et établir une relation de récurrence entre  $I_{n+1}$  et  $I_n$  pour  $n \in \mathbf{N}$ .
- (ii) Calculer  $I_n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

Soit  $X$  une v.a.r. qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .

- (iii) Calculer, pour tout  $n \geq 1$ , le moment  $\mathbb{E}(X^n)$  d'ordre  $n$  de  $X$ .

**Exercice 5.** Des clients arrivent à un guichet de manière aléatoire. On suppose qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que, pour tout  $t > 0$ , le nombre de clients arrivant entre les instants 0 et  $t > 0$  est une v.a.r.  $N_t$  qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\alpha t$ .

Soit  $X_1$  l'instant d'arrivée du premier client.

- (i) Déterminer la probabilité  $\mathbf{P}(X_1 > t)$ ; en déduire que  $X_1$  est une v.a. continue qui suit une loi exponentielle.
- (ii) Calculer  $\mathbb{E}(X_1)$  et  $\text{Var}(X_1)$ .

Pour  $n \geq 1$ , soit  $X_n$  l'instant d'arrivée du  $n$ -ième client.

- (iii) Déterminer la probabilité  $\mathbf{P}(X_n > t)$  et en déduire la fonction de répartition de  $X_n$ .
- (iv) Montrer que  $X_n$  est une v.a. continue et en déterminer une densité.
- (v) En utilisant l'Exercice 4, calculer  $\mathbb{E}(X_n)$  et  $\text{Var}(X_n)$ .

**Exercice 6.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  un espace probabilisé; on suppose qu'il existe  $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{F}$  tels  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ,  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$  et  $\mathbf{P}(\Omega_1) = \mathbf{P}(\Omega_2)$ .

Pour  $n \geq 1$ , on considère les v.a.r.  $X_{2n} = \mathbf{1}_{\Omega_1}$  et  $X_{2n+1} = \mathbf{1}_{\Omega_2}$ .

- (i) Déterminer la loi de  $X_n$ .
- (ii) Déduire de (i) que  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_1$ .
- (iii) Calculer  $\mathbf{P}(|X_{2n} - X_1| \geq 1)$ .
- (iv) Déduire de (iii) que  $(X_n)_n$  ne converge pas en probabilité vers  $X_1$ .

**Exercice 7.** Pour  $n \geq 1$ , on considère une v.a.r  $X_n$  suivant la loi uniforme sur  $\{k/n : k = 0, \dots, n\}$ . Montrez que  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  où  $X$  suit une loi uniforme sur  $[0, 1]$ .