Université de Rennes 1–Année 2017/2018

L2–Probabilités de base–Feuille de TD 1

Exercice 1. Soient Ω un ensemble et A et B des parties de Ω.
Simplifier les expressions

$$E = (A\cup B)\cap(A^c\cup B)\cap(A\cap B^c) \qquad \text{et} \qquad F = (A\cup B)\cap(A^c\cup B)\cap(A\cup B^c).$$

Exercice 2. Soient Ω un ensemble et A, B, C des parties de Ω.
Parmi les propositions suivantes, prouver celles qui sont vraies et donner des contre-exemples pour les autres :

1. $(A \cup B = \Omega) \Longrightarrow (A \subset B^c)$
2. $(A \cup B = \Omega) \Longrightarrow (A^c \subset B)$
3. $(A \cup B = \Omega \text{ et } A \cap B = \emptyset) \Longrightarrow (A = B^c)$
4. $(A \subset B^c) \Longrightarrow (A \cup B = \Omega)$
5. $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.

Exercice 3. Soit Ω un ensemble ; pour toute partie A de Ω, on rappelle que $\mathbf{1}_A$ est la fonction indicatrice de A.
(i) Montrer que, pour toutes parties A, B de Ω, on a

$$\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B,\ \mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B},$$
$$\mathbf{1}_{A^c} = \mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_A,\ \mathbf{1}_A\mathbf{1}_{A^c} = 0,\ \mathbf{1}_A\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A.$$

(ii) Utiliser (i) pour simplifier les expressions

$$(A^c \cup B) \cap (A \cap B^c) \qquad \text{et} \qquad (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c).$$

Exercice 4. Soient E et F deux ensembles de cardinaux respectifs n et k. On note F^E l'ensemble des applications de E dans F. Quel est le cardinal $\mathrm{Card}(F^E)$ de F^E ?

Exercice 5. Soit Ω un ensemble. Decrire une bijection entre l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω et $\{0,1\}^\Omega$. Déterminer le cardinal $\mathrm{Card}(\mathbf{P}(\Omega))$ de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$

Exercice 6. On jette 10 fois successivement une pièce de monnaie. Comment peut-on représenter le résultat d'une telle épreuve ? Combien a t-on de résultats différents ? Dans combien de résultats obtient-on exactement trois piles ? Dans combien de résultats obtient-on au moins un pile ?

Exercice 7. Une urne contient 5 boules blanches numérotées de 1 à 5 et 8 boules noires numérotées de 6 à 13. On tire successivement 6 boules de l'urne ; à chaque fois, on note le numéro de la boule tirée et on la remet ensuite dans l'urne.
Comment peut représenter le résultat d'une telle épreuve ?
Combien y a-t-il de tirages possibles ?
Dans combien de tirages obtient-on :

(1) 1 boule noire au plus ?

(2) 3 boules blanches exactement ?

(3) 1 boule blanche au moins ?

(4) 5 boules noires et une blanche, dans cet ordre ?

(5) 5 boules noires et une blanche, dans n'importe quel ordre ?

Exercice 8. Reprendre l'exercise précédent en supposant cette fois que les boules ne sont pas remises dans l'urne après tirage.

Exercice 9. On dispose de 13 livres différents : 4 de mathématique, 6 de physique et 3 de chimie.
On les range au hasard. Combien de façons y a-t-il de les ranger sur une même étagère ?
Combien de façons y a-t-il de les ranger en regroupant les livres de mathématique ?
Combien de façons y a-t-il de les ranger en les regroupant par matière ?

Exercice 10. Vingt chevaux sont au départ d'une course et un parieur joue au tiercé.
(i) Quel est le nombre de tiercés (dans l'ordre) qu'il peut jouer.
(ii) Quel est le nombre de tiercés possibles si on ne tient pas compte de l'ordre.

Exercice 11. 30 étudiants sont soumis à un test d'aptitude. Pour coder ce test afin de le rendre anonyme, chaque étudiant indique sur la fiche-test les quatre chiffres correspondant au jour et au mois de sa naissance. Quelle est la probabilité que deux étudiants aient le même code ?