Université de Rennes 1–Année 2022/2023
L3-PSI1/PRB–Feuille de TD 1

Exercice 1. Soient Ω un ensemble et A, B, C des parties de Ω. Parmi les propositions suivantes, prouver celles qui sont vraies et donner des contre-exemples pour les autres :

1. $(A \cup B = \Omega) \Longrightarrow (A \subset B^c)$
2. $(A \cup B = \Omega) \Longrightarrow (A^c \subset B)$
3. $(A \cup B = \Omega \text{ et } A \cap B = \emptyset) \Longrightarrow (A = B^c)$
4. $(A \subset B^c) \Longrightarrow (A \cup B = \Omega)$
5. $C \subset A \cup B \Longrightarrow C \subset A$ ou $C \subset B$
6. $A \cup B = B \cap C \Longleftrightarrow A \subset B \subset C.$

Exercice 2. (Règles de Morgan) Soit Ω un ensemble et et A, B, C des parties de Ω.
(i) Montrer que $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
(ii) Montrer que $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
(iii) Montrer que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
(iv) Montrer que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Exercice 3. (i) Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et k. Déterminer (avec preuve) le cardinal $\mathrm{Card}(E \times F)$ du produit cartésien $E \times F$.
(ii) Soient $F_1, \ldots, F_n$ des ensembles finis. Déterminer au moyen d'une récurrence $\mathrm{Card}(F_1 \times \cdots \times F_n)$.
(iii) $(*)$ Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et k. Soit $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F. Construire une bijection entre $\mathcal{F}(E, F)$ et le produit cartésien $F \times \cdots \times F$ (n-fois). En déduire $\mathrm{Card}(\mathcal{F}(E, F))$.

Exercice 4. Soit Ω un ensemble ; pour toute partie A de Ω, on rappelle que $\mathbf{1}_A$ est la fonction indicatrice de A, c-à-d la fonction définie par $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ sinon.

(i) Montrer que, pour toutes parties A, B de Ω, on a

$$\mathbf{1}_{A^c} = \mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_A,\ \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{A^c} = 0,\ \mathbf{1}_A \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A,$$
$$\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B,\ \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A \cap B}.$$

(ii) Soient A, B, C des parties de Ω. Etablir que

$$(\mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_A)(\mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_B)(\mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_C) = \mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_C + \mathbf{1}_{A \cap B} + \mathbf{1}_{A \cap C} + \mathbf{1}_{B \cap C} - \mathbf{1}_{A \cap B \cap C}$$

et en déduire que

$$\mathbf{1}_{A \cup B \cup C} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - \mathbf{1}_{A \cap B} - \mathbf{1}_{A \cap C} - \mathbf{1}_{B \cap C} + \mathbf{1}_{A \cap B \cap C}.$$

Exercice 5. Soit Ω un ensemble. Décrire une bijection entre l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω et $\mathcal{F}(\Omega, \{0, 1\})$. Déterminer $\mathrm{Card}(\mathbf{P}(\Omega))$.
Indication : Utiliser les fonctions indicatrices.

Exercice 6. ($*$) Soit Ω un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective $\Omega \to \mathcal{P}(\Omega)$. Indication : On pourra supposer, par l'absurde, qu'une telle application f existe ; considérer la partie $A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin f(\omega)\}$ de Ω et un antécédent $\omega_0 \in \Omega$ de A par f; se demander si ω_0 appartient à A.

Exercice 7. On jette 10 fois successivement une pièce de monnaie. Comment peut-on représenter le résultat d'une telle épreuve, en tenant compte de l'ordre d'apparition des piles et faces ? Combien a t-on de résultats différents ? Dans combien de résultats obtient-on exactement trois piles ? Dans combien de résultats obtient-on au moins un pile ?

Exercice 8. On dispose de 13 livres différents : 4 de mathématique, 6 de physique et 3 de chimie.
On les range au hasard. Combien de façons y a-t-il de les ranger sur une même étagère ?
Combien de façons y a-t-il de les ranger en regroupant les livres de mathématique ?
Combien de façons y a-t-il de les ranger en les regroupant par matière ?

Exercice 9. (12P.) Au poker, une **main** désigne un ensemble de 5 cartes piochées dans un paquet de 52 cartes.

Il y a 4 **couleurs** (pique-coeur-carreau-trèfle) et 13 **hauteurs** consécutives (as-roi-dame-valet-dix-neuf-huit-sept-six-cinq-quatre-trois-deux).

On se propose de calculer les probabilités de piocher certaines combinaisons classiques au poker.
(i) Modéliser l'expérience aléatoire par un espace probabilisé adéquat. Quelle est le nombre total de mains ?
(ii) Une **quinteflush** est une main constituée de 5 cartes de même couleur et de hauteurs consécutives (i.e. as-roi-dame-valet-dix de pique ou as-roi-dame-valet-dix de coeur etc...). Quelle est la probabilité d'obtenir une quinteflush ?
(iii) Un **carré** est une main constituée de 4 cartes de même hauteur (i.e. 4 as, 4 rois etc...) et d'une cinquième carte. Quelle est la probabilité de piocher un carré ?
(iv) Un **full** est une main constituée de 3 cartes de même hauteur et de deux cartes de même hauteur. Quelle est la probabilité de piocher un full ?
(v) Une **couleur** est constituée de 5 cartes de même couleur et qui n'est pas une quinteflush. Quelle est la probabilité de piocher une couleur ?
(vi) Une **suite** est une main constituée de 5 cartes de hauteurs consécutives (i.e. as, roi, dame, valet, dix etc..) et qui n'est pas une quinteflush. Quelle est la probabilité de piocher une suite ?