Université de Rennes 1–Année 2021/2022

L3–PSIN/PRB–Feuille de TD 1

Exercice 1. Soient Ω un ensemble et A et B des parties de Ω.
Simplifier les expressions

$$E = (A\cup B)\cap(A^c\cup B)\cap(A\cap B^c) \qquad \text{et} \qquad F = (A\cup B)\cap(A^c\cup B)\cap(A\cup B^c).$$

Exercice 2. Soient Ω un ensemble et A, B, C des parties de Ω.
Parmi les propositions suivantes, prouver celles qui sont vraies et donner des contre-exemples pour les autres :

1. $(A \cup B = \Omega \Longrightarrow (A \subset B^c)$
2. $(A \cup B = \Omega) \Longrightarrow (A^c \subset B)$
3. $(A \cup B = \Omega \text{ et } A \cap B = \emptyset) \Longrightarrow (A = B^c)$
4. $(A \subset B^c) \Longrightarrow (A \cup B = \Omega)$
5. $C \subset A \cup B \Longrightarrow C \subset A$ ou $C \subset B$
6. $A \cup B = B \cap C \Longleftrightarrow A \subset B \subset C.$

Exercice 3. (i) Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et k. Déterminer (avec preuve) le cardinal $\mathrm{Card}(E \times F)$ du produit cartésien $E \times F$.
(ii) Soient $F_1, \dots, F_n$ des ensembles finis. Déterminer au moyen d'une récurrence $\mathrm{Card}(F_1 \times \cdots \times F_n)$.
(iii) $(*)$ Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et k. Soit $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F. Construire une bijection entre $\mathcal{F}(E, F)$ et le produit cartésien $F \times \cdots \times F$ (n-fois). En déduire $\mathrm{Card}(\mathcal{F}(E, F))$.

Exercice 4. Soit Ω un ensemble ; pour toute partie A de Ω, on rappelle que $\mathbf{1}_A$ est la fonction indicatrice de A, c-à-d la fonction définie par $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ sinon.

(i) Montrer que, pour toutes parties A, B de Ω, on a

$$\mathbf{1}_{A^c} = \mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_A,\ \mathbf{1}_A\mathbf{1}_{A^c} = 0,\ \mathbf{1}_A\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A,$$
$$\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B,\ \mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B}.$$

(ii) Soient A, B, C des parties de Ω. Etablir que

$$(\mathbf{1}_\Omega-\mathbf{1}_A)(\mathbf{1}_\Omega-\mathbf{1}_B)(\mathbf{1}_\Omega-\mathbf{1}_C) = \mathbf{1}_\Omega-\mathbf{1}_A-\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_C+\mathbf{1}_{A\cap B}+\mathbf{1}_{A\cap C}+\mathbf{1}_{B\cap C}-\mathbf{1}_{A\cap B\cap C}$$

et en déduire que

$$\mathbf{1}_{A\cup B\cup C} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - \mathbf{1}_{A\cap B} - \mathbf{1}_{A\cap C} - \mathbf{1}_{B\cap C} + \mathbf{1}_{A\cap B\cap C}.$$

Exercice 5. Soit Ω un ensemble. Décrire une bijection entre l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω et $\mathcal{F}(\Omega, \{0, 1\})$. Déterminer $\mathrm{Card}(\mathbf{P}(\Omega))$.
Indication : Utiliser les fonctions indicatrices.

Exercice 6. $(*)$ Soit Ω un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective $\Omega \to \mathcal{P}(\Omega)$. Indication : On pourra supposer, par l'absurde, qu'une telle application f existe ; considérer la partie $A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin f(\omega)\}$ de Ω et un antécédent $\omega_0 \in \Omega$ de A par f; se demander si ω_0 appartient à A.

Exercice 7. Cinq cartes d'un jeu de 52 cartes constituent la "main" d'un joueur de Poker.

(1) Combien y a-t-il de mains possibles ?
(2) Combien de ces mains contiennent exactement un Roi ?
(3) Combien de ces mains ne contiennent aucun Roi ?
(4) Combien de ces mains contiennent au moins un Roi ?

Exercice 8. On jette 10 fois successivement une pièce de monnaie. Comment peut-on représenter le résultat d'une telle épreuve, en tenant compte de l'ordre d'apparition des piles et faces ? Combien a t-on de résultats différents ? Dans combien de résultats obtient-on exactement trois piles ? Dans combien de résultats obtient-on au moins un pile ?

Exercice 9. Une urne contient 5 boules blanches numérotées de 1 à 5 et 8 boules noires numérotées de 6 à 13. On tire successivement 6 boules de l'urne ; à chaque fois, on note le numéro de la boule tirée et on la remet ensuite dans l'urne.

Comment peut représenter le résultat d'une telle épreuve ? Combien y a-t-il de tirages possibles ? Dans combien de tirages obtient-on :

(1) 5 boules noires et une blanche, dans cet ordre ?
(2) 5 boules noires et une blanche, dans n'importe quel ordre ?
(3) 1 boule noire au plus ?
(4) 3 boules blanches exactement ?
(5) 1 boule blanche au moins ?

Exercice 10. On dispose de 13 livres différents : 4 de mathématique, 6 de physique et 3 de chimie.
On les range au hasard. Combien de façons y a-t-il de les ranger sur une même étagère ?
Combien de façons y a-t-il de les ranger en regroupant les livres de mathématique ?
Combien de façons y a-t-il de les ranger en les regroupant par matière ?