Université de Rennes 1
Année 2020/2021
Licence de Mathématiques 3

15 Décembre 2020

PSI-PRB-Probabilités-Examen 1ère session

Durée : 120 minutes ; documents non permis - Barême indicatif

Questions de cours. (6P.)

(i) Une association comprend 12 personnes.

(1) Combien de permanences de cette association composées de 3 personnes peut on former ?

(2) Combien de bureaux de cette association composés d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier peut on former ?

(ii) Une urne contient 5 boules numérotées, dont 3 sont blanches et 2 noires. Un joueur tire successivement, avec remise, 3 boules dans cette urne.

(1) Décrire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ modélisant cette expérience aléatoire.

Pour chaque boule blanche tirée, le joueur gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points. Soit X le nombre de boules blanches tirées et Y le nombre de points obtenus.

(2) Identifier la loi de X ; calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

(3) Exprimer Y en fonction de X; calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

(iii) A un jeu télévisé, on demande à des candidats de répondre par oui ou non à la question : Lima est elle la capitale du Pérou ? On estime qu'un français sur 3 connait la réponse ("oui"). Les candidats au jeu répondent au hasard s'ils ne connaissent pas la réponse. Si un candidat a répondu juste, qu'elle est la probabilité qu'il connaissait la réponse ?

(iv) Un commerçant estime que la demande journalière d'un certain produit est bien approchée par une variable aléatoire D de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $p = 1/10$. Il constitue un stock s de ce produit. Quelle est la valeur minimale de s pour la probabilité d'une rupture de stock soit inférieure à 10^{-5} ?

Tourner la page s.v.p

Exercice 1. (4P.) Soient X et Y deux v.a.r qui suivent des lois de Bernoulli, de paramètres $1/2$ et $1/3$ respectivement. On pose $a := \mathbf{P}(X = 1, Y = 1)$.
(i) Déterminer la loi conjointe de (X, Y) en fonction de a et présenter le résultat sous forme de tableau. Quelle condition doit satisfaire a?
(ii) Montrer que XY est une v.a.r. de Bernoulli dont on identifiera le paramètre.
(iii) Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(X, Y)$ en fonction de a.

Exercice 2. (5P.)
Soit X une variable aléatoire de densité

$$x \mapsto f(x) = axe^{-x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x),$$

où a est un nombre réel.
(i) Déterminer a.
(ii) Calculer les probabilités $\mathbf{P}(X \in \{0, 1\})$, $\mathbf{P}(X \leq 0)$ et $\mathbf{P}(-2 < X < 2)$.
(iii) Calculer l'espérance de X.
(iv) Soit $Y = 1/X$. Déterminer la fonction de répartition ainsi que la densité de Y.

Exercice 3. (6P.) Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité f définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} a(x^4 + y^4) & \text{si } (x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1] \\ 0 & \text{sinon }, \end{cases}$$

où a est un nombre réel.
(i) Déterminer a.
(ii) Déterminer les densités f_X et f_Y de X et de Y.
(iii) X et Y sont-elles indépendantes ?
(iv) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$.
(v) Soit $x \in [0, 1]$. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|X = x)$.