Université de Rennes 1
Année 2021/2022

L3

PRB-PSI1 – C2 du 1/12/2021
Corrigé

Exercice 1 (7P.) Soient X et Y deux v.a.r qui suivent des lois de Bernoulli, chacune de paramètres 1/2. On suppose que $\mathbf{P}(X=1, Y=1) = 1/12$.
(i) Déterminer la loi conjointe de (X, Y), en présentant le résultat sous forme de tableau.
Solution :

X/Y	0	1	P_X
0	1/12	5/12	1/2
1	5/12	1/12	1/2
P_Y	1/2	1/2	1

(ii) Montrer que XY est une v.a.r. de Bernoulli dont on identifiera le paramètre.
Solution : *On a* $XY(\Omega) \in \{0,1\}$; *comme* $\{XY = 1\} = \{X = 1, Y = 1\}$, *on a* $\mathbf{P}(XY = 1) = \mathbf{P}(X = 1, Y = 1) = 1/12$ *et donc* $XY \sim \mathscr{B}(1/12)$.
(iii) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$; X et Y sont elles indépendantes ?
Solution : $\boldsymbol{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{12} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$; *comme* $\boldsymbol{Cov}(X,Y) \neq 0$, *les v.a.r* X *et* Y *ne sont pas indépendantes.*

Exercice 2 (7P.) Pour $a \in \mathbf{R}$ fixé, soit X une variable aléatoire continue de densité f, donnée par $f(x) = \dfrac{a}{x+1}$ pour tout $x \in [0,1[$ et $f(x) = 0$ sinon.
(i) Déterminer a.
Solution : *On a :* $1 = \int_{\mathbf{R}} f(x)dx = a\int_0^1 \dfrac{1}{x+1}dx = a[\ln(x+1)]_0^1 = a\ln 2$ *et donc* $a = \dfrac{1}{\ln 2}$.
(ii) Montrer que X possède une espérance et la calculer.
Solution : *On a*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} |xf(x)|dx &= \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}dx \\ &= \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 (1 - \frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{\ln 2}[x - \ln(x+1)|_0^1 = \frac{1-\ln 2}{\ln 2}.\end{aligned}$$

Comme $\int_{\mathbf{R}} |xf(x)|dx = \int_0^1 |xf(x)|dx = \int_0^1 xf(x)dx = \int_{\mathbf{R}} xf(x)dx$, *ceci montre que* $\mathbf{E}(X)$ *existe et qu'on a* $\mathbf{E}(X) = \frac{1-\ln 2}{\ln 2}$.

(iii) Déterminer la densité de $Y = \frac{1}{X-1}$.

Solution : *On a* $X(\Omega) = [0,1[$ *(plus précisément* $\mathbf{P}(X \notin [0,1[) = 0$*) et donc* $Y(\Omega) =]-\infty, -1]$. *D'où* $F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \le y) = 1$ *pour* $y \ge -1$. *Soit* $y < -1$*; alors, comme* $X - 1 \le 0$ *et* $y \ne 0$, *on a*

$$\{Y \le y\} = \left\{\frac{1}{X-1} \le y\right\} = \left\{X - 1 \ge \frac{1}{y}\right\} = \left\{X \ge 1 + \frac{1}{y}\right\}$$

et donc

$$F_Y(y) = \frac{1}{\ln 2}\int_{1+1/y}^{1} \frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{\ln 2}[\ln(x+1)]_{1+1/y}^{1} = \frac{1}{\ln 2}(\ln 2 - \ln(2+1/y)).$$

La densité f_Y *de* Y *s'obtient en dérivant* F_Y : *on a* $f_Y(y) = 0$ *pour* $y \ge -1$ *et* $f_Y(y) = \frac{1}{\ln 2} \times \frac{1}{2y^2 + y}$ *pour* $y < -1$.

Exercice 3 (6P.) Soit

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^+, (x,y) \mapsto \begin{cases} e^{-x} & \text{si } 0 < y < x \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

(i) Vérifier que f est bien une densité.

Solution : *On a*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx &= \int_0^{\infty}\left(\int_0^x e^{-x}dy\right)dx \\ &= \int_0^{\infty} xe^{-x}dx \\ &\underset{\text{IPP}}{=} [-xe^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}dx \\ &= 0 + [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1. \end{aligned}$$

Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité f.

(ii) Déterminer les densités f_X et f_Y de X et de Y.

Solution : *Pour* $x \in \mathbf{R}$, *on a*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

et donc $f_X(x) = 0$ *pour* $x < 0$ *; soit* $x \geq 0$, *alors*

$$f_X(x) = \int_0^x e^{-x} dy = xe^{-x}.$$

Pour $y \in \mathbf{R}$, *on a*

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

et donc $f_Y(y) = 0$ *pour* $y < 0$. *Pour* $y \geq 0$, *on a*

$$f_Y(y) = \int_y^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{x=y}^{x=+\infty} = 0 - (-e^{-y}) = e^{-y}.$$

(iii) X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution : *Non,* X *et* Y *ne sont pas indépendantes ; en effet, supposons par l'absurde que* X *et* Y *sont indépendantes. On a alors (voir Cours)*

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \qquad f(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

On a, en particulier, $e^{-x} = e^{-x} x e^{-y}$, *c-à-d* $1 = e^{-y} x$ *ou encore* $x = e^y$ *pour* ***tous*** $0 < y < x$. *Ceci est absurde (en prenant* $y = 1$ *par exemple, on aurait* $x = e$ *pour tout* $x > 1$*).*