Université de Rennes 1–Année 201/2016

L2–Probabilités de base–DM2

à rendre le 30 mars en TD

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire continue de densité f, donnée par $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$.
(i) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
(ii) Calculer les probabilités $\mathbf{P}(1 \leq X < \sqrt{2})$ et $\mathbf{P}(|X| \geq 3)$.
(iii) Soit $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y et la reconnaître.
(iv) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 2. Soient (X_n) et $(Y_n)_n$ des suites de v.a.r. sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ convergeant en probabilité vers deux v.a.r X et Y respectivement.
(i) Soit $\epsilon > 0$. Montrer que l'évènement $(|(X_n + Y_n) - (X + Y)| \geq \epsilon)$ entraîne l'évènement $(|X_n - X| \geq \epsilon/2) \cup (|Y_n - Y| \geq \epsilon/2)$.
(ii) Montrer que $(X_n + Y_n)_n$ converge en probabilité vers $X + Y$.
(iii) On suppose qu'il existe une autre v.a.r X' telle que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X'. Déduire de (ii) que $\mathbf{P}(X = X') = 1$.
(iv) On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ tel que, pour tout n, on ait $|X_n| \leq C$ et $|Y_n| \leq C$. Montrer que $(X_nY_n)_n$ converge en probabilité vers XY.