Université de Rennes 1–Année 2017/2018

L3–Probabilités–DM2

à rendre le 29 mars en TD

Exercice 1. Soient X et Y deux v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ possédant toutes deux un moment d'ordre 2. On suppose que $\mathrm{Var}(X) > 0$. Déterminer $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tels que la quantité $\mathbb{E}\left((Y - (aX + b))^2\right)$ soit minimale.

Indication : considérer $\mathrm{Var}(Y - (aX + b))$ et sa relation avec $\mathbb{E}\left((Y - (aX + b))^2\right)$

Exercice 2. On dit qu'une v.a.r X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est **sans mémoire** si $\mathbf{P}(X > t + s | X > s) = \mathbf{P}(X > t)$ pour tous t, s.
(i) Montrez que si une v.a.r X suit une loi exponentielle, alors X est sans mémoire.
(ii) Montrez que si une v.a.r X est positive, sans mémoire et à densité, alors X suit une loi exponentielle.

Exercice 3. Soient (X_n) et $(Y_n)_n$ des suites de v.a.r. sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ convergeant en probabilité vers deux v.a.r X et Y respectivement.
(i) Soit $\epsilon > 0$. Montrer que l'évènement $\{|(X_n + Y_n) - (X + Y)| \geq \epsilon)\}$ entraîne l'évènement $\{|X_n - X| \geq \epsilon/2\} \cup \{|Y_n - Y| \geq \epsilon/2\}$.
(ii) Montrer que $(X_n + Y_n)_n$ converge en probabilité vers $X + Y$.
(iii) On suppose qu'il existe une autre v.a.r X' telle que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X'. Déduire de (ii) que $\mathbf{P}(X = X') = 1$.