# Une application du théorème de Hahn-Banach: existence de moyennes invariantes

Bachir Bekka

14 avril 2006

Soit $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$ ou $E = \ell^\infty(\mathbb{Z})$ l'espace vectoriel réel des suites réelles bornées $a = (a_n)_n$ indexées par $\mathbb{N}$ ou par $\mathbb{Z}$, muni de la norme $\|a\|_\infty = \sup_n |a_n|$.

On dira que $a = (a_n)_n \in E$ est positive, et on écrira $a \geq 0$, si $a_n \geq 0$ pour tout $n$. On note également $\mathbf{1}$ la suite constante égale à 1.

Pour $k \in \mathbb{N}$ ou $k \in \mathbb{Z}$, on note $T_k : E \to E$ l'opérateur de translation défini par

$$T_k((a_n)_n) = (a_{n+k})_n \qquad \text{pour tout} \quad (a_n)_n \in E.$$

Dans le cas où $E = \ell^\infty(\mathbb{Z})$, on dira qu'une suite $a = (a_n)_n \in E$ est convergente si les limites $\lim_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim_{n\to-\infty} a_n$ existent dans $\mathbb{R}$ et sont égales; on écrira alors $\lim a$ pour l'une de ces limites.

On remarquera que si $\lim a$ existe, alors, pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, la limite $\lim T_k(a)$ existe aussi et $\lim T_k(a) = \lim a$. Le théorème suivant, dû à Banach, montre l'existence d'une notion de limite généralisée avec la même propriété pour des suites *quelconques* dans $E$.

**Théorème 1** ***(Banach)*** *Soit, comme plus haut, $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$ ou $E = \ell^\infty(\mathbb{Z})$. Il existe une forme linéaire $M : E \to \mathbb{R}$ avec les propriétés suivantes:*

*(i)* $M(a) \geq 0$ *pour tout* $a \in E$ *avec* $a \geq 0$;

*(ii)* $M(\mathbf{1}) = 1$;

*(iii)* $M(T_k(a)) = M(a)$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *ou* $k \in \mathbb{Z}$ *et tout* $a \in E$ *(*invariance par translations*).*

*De plus, $M$ est continue et, pour toute suite $a$ convergente dans $E$, on a $M(a) = \lim a$.*

**Preuve** Il suffit de traiter le cas où $E = \ell^\infty(\mathbb{Z})$. En effet, on peut plonger $\ell^\infty(\mathbb{N})$ comme sous espace de $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ par l'application

$$a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \widetilde{a} = (\widetilde{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

où $\widetilde{a}_n = a_n$ si $n \geq 0$ et $\widetilde{a}_n = a_{-n}$ si $n < 0$. (On observera que $\lim \widetilde{a}$ existe si et seulement si $\lim a$ existe, et que dans ce cas $\lim \widetilde{a} = \lim a$.)

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, soit $f_N$ la forme linéaire sur $E$ définie par la moyenne de Césaro

$$f_N(a) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} a_n \qquad \text{pour tout} \quad a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in E.$$

On définit une fonction $p : E \to \mathbb{R}$ sur $E$ par

$$p(a) = \limsup_N f_N(a) \qquad \text{pour tout} \quad a \in E.$$

(On observera que $p(a)$ existe dans $\mathbb{R}$ car $a$ est bornée.)

Soit $F = \{a \in E \ : \ \lim a \text{ existe}\}$. Alors $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et $a \mapsto \lim a$ est une forme linéaire sur $F$.

• On a $p(a+b) \leq p(a) + p(b)$ pour tout $a, b \in E$ : en effet,

$$\begin{aligned} p(a+b) &= \limsup_N f_N(a+b) = \limsup_N (f_N(a) + f_N(b)) \\ &\leq \limsup_N f_N(a) + \limsup_N f_N(b) = p(a) + p(b). \end{aligned}$$

• Il est clair que $p(ta) = tp(a)$ pour tous $a \in E$ et $t \in \mathbb{R}^+$.

• On a $-p(-a) \leq p(a)$ pour tout $a \in E$ : ceci d'ecoule des deux propriétés précédentes; en effet, $0 = p(0) = p(a-a) \leq p(a) + p(-a)$.

• Il est clair que $p(a) = \lim a$ pour tout $a \in F$.

• Pour $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$p(a - T_k(a)) = p(T_k(a) - a) = 0.$$

En effet, posons $b = T_k(a) - a$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Alors $b_n = a_{n+k} - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
f_N(b) &= \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}(a_{n+k} - a_n) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2N+1}\left(\sum_{n=N+1}^{N+k} a_n - \sum_{n=-N}^{-N+k-1} a_n\right) & \text{si } k \geq 0 \\ \frac{1}{2N+1}\left(\sum_{n=-N+k}^{-N-1} a_n - \sum_{n=N+k+1}^{N} a_n\right) & \text{si } k < 0 \end{cases} \\
&\leq \frac{2|k|}{2N+1}\|a\|_\infty;
\end{aligned}$$

il s'ensuit que $p(b) = \limsup_N f_N(b) \leq 0$. Par le même raisonnement, on a $p(-b) \leq 0$. Comme $-p(-b) \leq p(b)$ (voir plus haut), on a alors

$$0 \leq -p(-b) \leq p(b) \leq 0$$

et donc $p(b) = p(-b) = 0$.

Par le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire $M$ sur $E$ telle que $M(a) \leq p(a)$ pour tout $a \in E$ et telle que $M(a) = \lim a$ pour tout $a \in F$. Les propriétés de l'enoncé sont satisfaites:

(i) Pour tout $a \in E$ avec $a \geq 0$, on a $f_N(a) \geq 0$ pour tout $N$ et donc $M(a) = \limsup_N f_N(a) \geq 0$.

(ii) $M(\mathbf{1}) = \lim \mathbf{1} = 1$;

(iii) Pour tous $a$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a $M(T_k(a)) = M(a)$. En effet, posons $b = T_k(a) - a$. Par ce qui précède, on a $p(b) = p(-b) = 0$. Comme $M(b) \leq p(b)$, on a donc $M(b) \leq 0$. De même, $-M(b) = M(-b) \leq p(-b) = 0$. Ceci montre que $M(b) = 0$.

De plus, $M$ est continue: soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in E$. Comme $\|a\|_\infty\mathbf{1} - a \geq 0$, on a $M(\|a\|_\infty\mathbf{1} - a) \geq 0$, c-à-d, $M(a) \leq \|a\|_\infty$. De même, $\|a\|_\infty\mathbf{1} + a \geq 0$ et donc $-M(a) = M(-a) \leq \|a\|_\infty$. Ceci montre que $|M(a)| \leq \|a\|_\infty$. ■

**Exercice 2** Soit $q : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ défini par $q(a) = \limsup_n a_n$ pour $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Vérifier que $q(a+b) \leq q(a) + q(b)$, $q(ta) = tq(a)$ et $q(T_k(a)) = q(a)$ pour tous $a, b \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, $t \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}$. Pourquoi ne peut-on pas, de manière plus simple, prendre $q$ à la place de $p$ dans la preuve du théorème précédent?

**Commentaires 3** (i) Une fonctionnelle $M$ sur $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ comme dans le théorème précédent est appelée *moyenne invariante* ou, dans une terminologie plus ancienne, *limite généralisée de Banach.*

(ii) Il est évident qu'il n'existe pas de mesure de probabilité invariante par translations sur le groupe $\mathbb{Z}$; une moyenne invariante $M$ sur $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ est souvent utilisée comme *ersatz* d'une telle mesure.

(iii) Dans un langage moderne, le théorème précédent dit que le groupe $\mathbb{Z}$ est *moyennable.* Plus généralement, tout groupe résoluble $G$ est moyennable: par définition, ceci signifie qu'il existe sur l'espace $\ell^\infty(G)$ des fonctions bornées sur $G$ une forme linéaire $M$ avec les mêmes propriétes que celles du théorème précédent (pour tout $g \in G$, l'opérateur de translation $T_g : \ell^\infty(G) \to \ell^\infty(G)$ est défini par $T_g(a)(s) = a(gs)$ pour $a \in \ell^\infty(G)$ et $s \in G$). Un groupe fini est moyennable, de manière évidente.

(iv) Les moyennes invariantes pour un groupe moyennable ne sont pas données de manière explicite; leur existence dépend du théorème de Hahn-Banach et donc, en dernier ressort, de l'axiome du choix. Néanmoins, et c'est là un point remarquable, les groupes moyennables peuvent être caractérisés par de très nombreuses propriétés qui sont parfaitement explicites. La moyennabilité est une propriété importante: les groupes qui sont moyennables ont dans de nombreuses situations un comportement radicalement différent de ceux qui ne le sont pas (voir, par exemple, le point suivant).

(v) Historiquement, le premier exemple - dû à Hausdorff- d'un groupe non moyennable est le sous-groupe de $SO(3, \mathbb{R})$ engendré par les deux rotations $R_1$ et $R_2$ suivantes: $R_1$ est la rotation d'axe $z$ et d'angle $\arccos(1/3)$ et $R_2$ est la rotation d'axe $x$ et d'angle $\arccos(1/3)$. Ce groupe a été utilisé par von Neumann pour donner une explication du paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski: on peut découper la boule unité dans $\mathbb{R}^3$ en 5 morceaux et les réarranger de manière à obtenir deux boules de volume 1! Un tel paradoxe n'existe pas en dimension 1 ou 2, les groupes orthogonaux étant moyennables dans ce cas.

**Références 4** L'existence de moyennes invariantes sur $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ apparait dans "Théorie des opérations linéaires" de S. Banach (Varsovie 1932; réedition chez Jacques Gabay 1993). Pour en savoir plus sur les groupes moyennables, voir par exemple le livre de P. Greeenleaf "Invariant means on tological groups", van Nostrand (1969). Le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski est traité dans le livre admirable "The Banach-Tarski paradox" de S. Wagon, Cambridge University Press 1995.