Isométries des espaces de Banach: Théorème de Mazur-Ulam

Bachir Bekka

April 5, 2006

On se propose de montrer que toute isométrie d'un espace de Banach réel est affine (Théorème de Mazur-Ulam).

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Une application $f : E \to E$ est une *isométrie* si

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \qquad \text{pour tous} \quad x, y \in E.$$

On se propose de généraliser le fait suivant qui est bien connu et dont la preuve est facile.

Proposition 1 *Soit* $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ *un espace de Hilbert* réel. *Soit* $f : E \to E$ *une isométrie telle que* $f(0) = 0$. *Alors* f *est linéaire.*

Preuve Comme $f(0) = 0$ et comme f est isométrique, on a, pour tout $x \in E$,

$$\|f(x)\| = \|f(x) - f(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|.$$

De l'identité

$$\langle x|y\rangle = -\frac{1}{2}\left(\|x - y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right),$$

il s'ensuit que

$$\langle f(x)|f(y)\rangle = \langle x|y\rangle \qquad \text{pour tous} \quad x, y \in E.$$

Soit $(e_i)_i$ une base orthonormée de E. Ce qui précède montre que $(f(e_i))_i$ est également une base orthonormée de E.

Soit $x \in E$. Alors $x = \sum_i \langle x|e_i\rangle e_i$ (développement selon $(e_i)_i$) et $f(x) = \sum_i \langle f(x)|f(e_i)\rangle f(e_i)$ (développement selon $(f(e_i))_i$). On a donc $f(x) = \sum_i \langle x|e_i\rangle f(e_i)$. Ceci implique clairement que f est linéaire. ■

Remarque 2 Le résultat précédent ne se généralise pas aux espaces de Hilbert complexes: la conjugaison $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$ est une isométrie qui fixe 0 mais qui n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.

Théorème 3 ***(Mazur-Ulam)*** *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach* réel. *Soit* $f : E \to E$ *une isométrie bijective telle que* $f(0) = 0$. *Alors* f *est linéaire.*

Preuve Il suffit de montrer que,

$$(*) \qquad f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) \qquad \text{pour tous} \quad x, y \in E.$$

En effet, supposons que $(*)$ soit démontré. Alors, comme $f(0) = 0$, on aura $f(x/2) = f(x)/2$ pour tout $x \in E$, c-à-d $f(2x) = 2f(x)$ pour tout $x \in E$. On aura ainsi, pour tous $x, y \in E$,

$$f(x+y) = f\left(\frac{1}{2}(2x+2y)\right) = \frac{1}{2}\left(f(2x) + f(2y)\right) = f(x) + f(y).$$

Donc f est additive. Par suite, $f(rx) = rf(x)$ pour tous $x \in E, r \in \mathbb{Q}$. Par continuite de f (qui est une isométrie) et par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il s'ensuit que $f(rx) = rf(x)$ pour tous $x \in E, r \in \mathbb{R}$. Ceci montre que f est linéaire.

Pour montrer $(*)$, fixons $x_1, x_2 \in E$. Soit H_1 l'ensemble des éléments $x \in E$ tels que

$$\|x - x_1\| = \|x - x_2\| = \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

Pour tout $n \geq 2$, on définit par récurrence une suite $(H_n)_n$ de parties de E par

$$H_n = \{x \in H_{n-1} \ : \ \|x - y\| \leq \frac{\operatorname{diam}(H_{n-1})}{2} \qquad \text{pour tout} \quad y \in H_{n-1}\},$$

où

$$\operatorname{diam}(H_{n-1}) = \sup_{y,z \in H_{n-1}} \|y - z\|$$

est le diamètre de H_{n-1}.

Les parties H_n ont les propriétés suivantes:

•(1) Pour tout $n \geq 2$, on a $H_{n-1} \subset H_n$: ceci est clair par construction.

•(2) H_n est fermée pour tout $n \geq 1$: c'est immédiat.

•(3) On a

$$\mathrm{diam}(H_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}}\|x_1 - x_2\|$$

pour tout $n \geq 1$ et donc $\lim_n \mathrm{diam}(H_n) = 0$: en effet, si H_n n'est pas vide, soient $x, y \in H_n$. Alors, comme $H_n \subset H_{n-1}$, on a $y \in H_{n-1}$ et donc

$$\|x - y\| \leq \frac{\mathrm{diam}(H_{n-1})}{2},$$

par définition de H_n. D'où , par récurrence,

$$\mathrm{diam}(H_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}}\mathrm{diam}(H_1).$$

D'autre part, pour $x, y \in H_1$, on a

$$\|x - y\| \leq \|x - x_1\| + \|y - x_1\| = \|x_1 - x_2\|$$

et donc $\mathrm{diam}(H_1) \leq \|x_1 - x_2\|$.

•(4) Chaque H_n est invariant par la symétrie

$$s : E \to E,\ x \mapsto x_1 + x_2 - x.$$

En effet, si $x \in H_1$, alors

$$\|s(x)-x_1\| = \|x-x_2\| = \frac{1}{2}\|x_1-x_2\| \quad \text{et} \quad \|s(x)-x_2\| = \|x-x_1\| = \frac{1}{2}\|x_1-x_2\|,$$

et donc $s(x) \in H_1$.

Supposons que H_{n-1} est invariant par s pour $n \geq 2$ et montrons que H_n l'est aussi. Soit $x \in H_n$. Pour tout $y \in H_{n-1}$, on a $s(y) \in H_{n-1}$ et donc

$$\|s(x) - y\| = \|x_1 + x_2 - x - y\| = \|x - s(y)\| \leq \frac{\mathrm{diam}(H_{n-1})}{2}.$$

D'où $s(x) \in H_n$.

•(5) Le point $m = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ appartient à tous les H_n : en effet, il est clair que $m \in H_1$. Supposons que $m \in H_{n-1}$ pour $n \geq 2$ et montrons que $m \in H_n$. Soit $y \in H_{n-1}$. Par ce qui précède, on a $s(y) \in H_{n-1}$. D'où

$$2\|m - y\| = \|x_1 + x_2 - 2y\| = \|s(y) - y\| \leq \mathrm{diam}(H_{n-1}),$$

et donc $\|m-y\| \leq \dfrac{\operatorname{diam}(H_{n-1})}{2}$. Ceci montre que $m \in H_n$.

Comme E est un espace métrique complet, les propriétés (1), (2) et (3) précédentes montrent que l'intersection $\bigcap_{n\geq 1} H_n$ est soit vide, soit réduite à un singleton. La propriété (5) implique alors que

$$\bigcap_{n\geq 1} H_n = \left\{\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right\}.$$

Remplaçons dans tout ce qui précède le couple (x_1, x_2) par le couple $(f(x_1), f(x_2))$. On définira alors des parties $\widetilde{H}_n$ de E avec les mêmes propriétés et telles que

$$\bigcap_{n\geq 1} \widetilde{H}_n = \left\{\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))\right\}.$$

Comme f est une isométrie et comme f est une bijection, on vérifie que $\widetilde{H}_n = f(H_n)$ pour tout $n \geq 1$. Il s'ensuit alors que

$$f\left(\left\{\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right\}\right) = f(\bigcap_{n\geq 1} H_n) = \bigcap_{n\geq 1} f(H_n) = \bigcap_{n\geq 1} \widetilde{H}_n = \left\{\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))\right\},$$

ce qui signifie que $f\left(\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)\right) = \dfrac{1}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)$. $\blacksquare$

Remarque 4 (i) Si, avec les hypothèses du théorème de Mazur-Ulam, on ne suppose plus que $f(0)=0$, la conclusion est que f est affine. En effet, l'application $g : E \to E$ définie par $g(x) = f(x) - f(0)$ est une isométrie bijective telle que $g(0)=0$. Alors g est linéaire par le théorème de Mazur-Ulam et f est affine.

(ii) L'argument essentiel de la preuve est le suivant: étant donnés deux points $x_1, x_2 \in E$, la preuve montre que le “milieu” $\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)$ de x_1, x_2 - qui dépend de la structure vectorielle de E- se caractérise en termes *purement métriques,* c-à-d uniquement au moyen de la distance associée $d(x,y) = \|x-y\|$. Il n'est alors pas surprenant qu'une isométrie bijective (qui préserve donc la distance) préserve également la structure linéaire de E.

(iii) La remarque (ii) indique que la construction de la preuve précédente est valable dans un espace métrique complet (E,d) quelconque: pour deux points $x_1, x_2 \in E$ on peut définir les ensembles H_n comme dans la preuve. Les propriétés (1), (2) et (3) seront satisfaites et l'intersection $\bigcap_{n\geq 1} H_n$ est alors soit vide, soit réduite à un singleton $\{m\}$. Dans ce dernier cas, m est appelé le *centre* du couple x_1, x_2.

(iv) Supposons que E est un espace de Hilbert ou, plus généralement, un espace de Banach strictement convexe. Alors, pour $x_1, x_2 \in E$, le centre $\dfrac{1}{2}(x_1 + x_2)$ est l'*unique* élément de H_1 et la preuve se simplifie grandement. En général, H_1 contient d'autres éléments (voir l'exercice plus bas).

(v) Le théorème de Mazur-Ulam reste vrai si on suppose que E est seulement un espace normé et non plus nécessairement de Banach. Pour voir ceci, on peut reprendre la preuve et remarquer qu'elle s'adapte à ce cas. Un autre argument est comme suit. Soit $\widetilde{E}$ le complété de E. Alors f s'etend en une unique isométrie $\widetilde{f}$ de $\widetilde{E}$, à laquelle s'applique alors le théorème de Mazur-Ulam. Alors $\widetilde{f}$ et donc f est linéaire.

Exercice 5 Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|(x,y)\| = |x| + |y|$. Pour le couple $(1,0), (0,1)$, déterminer les ensembles H_n comme dans la preuve du théorème de Mazur-Ulam.

Références Le résultat de Mazur-Ulam a été publié dans Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 194 (1932), 946–948.

Il est traité dans le passionnant classique "Théorie des opérations linéaires" de S. Banach (Varsovie 1932; réedition chez Jacques Gabay 1993) dont la lecture est à conseiller.

Pour une généralisation du théorème de Mazur-Ulam, on pourra consulter l'agréable article de R. Bhatia et P. Semrl "Approximate isometries on Euclidean spaces", Amer. Math. Monthly 104 (1997), no. 6, 497–504.