Isométries des espaces ℓ^p

Bachir Bekka

October 2, 2006

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réel. Une application $U : E \to E$ est une *isométrie* si

$$\|Ux - Uy\| = \|x - y\| \qquad \text{pour tous} \quad x, y \in E.$$

On notera $\mathbf{O}(E)$ l'ensemble des isométries bijectives $U : E \to E$ telles que $U(0) = 0$. C'est un groupe pour la composition des applications. De plus, par le théorème de Mazur-Ulam, toute application dans $\mathbf{O}(E)$ est *linéaire* (voir l'article "Isométries des espaces de Banach: Théorème de Mazur-Ulam" sur ce site). Dans la suite, on pourra admettre ce résultat, quitte à *définir* $\mathbf{O}(E)$ comme le groupe des isométries linéaires et bijectives de E.

Par abus de langage, on dira que $\mathbf{O}(E)$ est le groupe d'isométrie de E.

Pour $p \in [1, \infty[$, soit ℓ^p l'espace de Banach des suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels, pour la norme $\|(a_n)_{n\in\mathbf{N}}\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbf{N}} |a_n|^p\right)^{1/p}$.

Quand $p = 2$, l'espace $\ell^p = \ell^2$ est un espace de Hilbert et son groupe d'isométrie est très "gros": il est en correspondance biunivoque avec les bases hilbertiennes ordonnées de ℓ^2 et échappe ainsi à toute description raisonnable.

De manière surprenante et comme on se propose de le montrer, le groupe $\mathbf{O}(\ell^p)$ pour $p \neq 2$ admet une description très simple. C'est un résultat dû à Banach; voir le Chapitre XI de son classique "Théorie des opérations linéaires" (Varsovie 1932, réedition chez Jacques Gabay 1993).

Théorème 1 ***(Banach)*** *Soit $U \in \mathbf{O}(\ell^p)$ pour $p \in [1, \infty[, p \neq 2$. Alors il existe une bijection $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ et une suite de nombres $\varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ tels que*

$$U((x_n)_{n\in\mathbf{N}}) = (\varepsilon_n x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbf{N}}, \qquad \forall \quad (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^p.$$

Remarque 2 Il est évident que, si $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est une bijection et $(\varepsilon_n)_n$ est une suite avec $\varepsilon_n \in \{\pm 1\}$, alors $U : \ell^p \to \ell^p$, définie par la formule $U((x_n)_{n\in\mathbf{N}}) = (\varepsilon_n x_{\sigma(n)})_n$, est une isométrie linéaire et bijective. Le théorème donne ainsi une description complète du groupe $\mathbf{O}(\ell^p)$: il est isomorphe au produit semi-direct

$$\mathcal{S}(\mathbf{N}) \ltimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}},$$

pour l'action naturelle du groupe $\mathcal{S}(\mathbf{N})$ des bijections $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ sur le groupe $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$ des suites d'éléments dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

1 Démonstration du Théorème 1

Pour la preuve, nous aurons besoin de quelques inégalités élémentaires. Rappelons que $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$ pour tous $a, b \in \mathbf{R}$.

Lemme 3 *Soient* $a, b \in \mathbf{R}$.

(i) Soient $0 < p < q$. *Alors*

$$(|a|^q + |b|^q)^{1/q} \leq (|a|^p + |b|^p)^{1/p}.$$

(ii) Soit $1 \leq p < 2$. *Alors*

$$|a+b|^p + |a-b|^p \leq 2(|a|^p + |b|^p),$$

et l'égalité n'a lieu que si $ab = 0$.

(iii) Soit $2 < p < +\infty$. *Alors*

$$|a+b|^p + |a-b|^p \geq 2(|a|^p + |b|^p)$$

et l'égalité n'a lieu que si $ab = 0$.

Preuve (i) On peut supposer que $ab \neq 0$. Posons $\alpha = (|a|^p + |b|^p)^{1/p} > 0$. Alors $|a/\alpha| \leq 1, |b/\alpha| \leq 1$ et donc

$$(|a|/\alpha)^q + (|b|/\alpha)^q \leq (|a|/\alpha)^p + (|b|/\alpha)^p = 1.$$

(ii) Soit $1 \leq p < 2$. La fonction $x \mapsto x^{p/2}$ étant concave, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(|a+b|^p + |a-b|^p\right) &= \frac{1}{2}\left((|a+b|^2)^{p/2} + (|a-b|^2)^{p/2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2^{p/2}}\left(|a+b|^2 + |a-b|^2\right)^{p/2}. \qquad (*)\end{aligned}$$

D'où

$$
\begin{aligned}
|a+b|^p + |a-b|^p &\leq 2^{1-p/2}\left(|a+b|^2 + |a-b|^2\right)^{p/2} \\
&= 2^{1-p/2}2^{p/2}\left(|a|^2 + |b|^2\right)^{p/2} \\
&= 2\left(|a|^2 + |b|^2\right)^{p/2} \\
&\leq 2\left(|a|^p + |b|^p\right),
\end{aligned}
$$

où on a utilisé l'inégalité (i).

Supposons qu'on a égalité dans $(*)$. Alors, par la stricte concavité de $x \mapsto x^{p/2}$, on a $|a+b|^p = |a-b|^p$, c-à-d,

$$|a+b| = |a-b|$$

et ceci implique que $a = 0$ ou $b = 0$.

(iii) Soit $p > 2$. Comme plus haut, par concavité de $x \to x^{2/p}$, on a

$$2(|a|^2 + |b|^2) = |a+b|^2 + |a-b|^2 \leq 2^{1-2/p}\left(|a+b|^p + |a-b|^p\right)^{2/p},$$

c-à-d

$$2(|a|^2 + |b|^2)^{p/2} \leq |a+b|^p + |a-b|^p$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité (i), on a

$$|a|^p + |b|^p \leq (|a|^2 + |b|^2)^{p/2}.$$

L'inégalité voulue est ainsi démontrée. Le cas d'égalité implique, comme plus haut, que $a = 0$ ou $b = 0$. ■

Si $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite nombres réels, convenons d'appeler *support* de $\mathbf{a}$ la partie

$$\mathrm{supp}(\mathbf{a}) = \{n \in \mathbf{N} \quad | \quad a_n \neq 0\}$$

de $\mathbf{N}$.

Le corollaire suivant est le point–clé dans la démonstration du Théorème 1.

Corollaire 4 *Soit $p \in [1, \infty[, p \neq 2$. Pour $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \ell^p$, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|_p^p + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|_p^p = 2(\|\mathbf{a}\|_p^p + \|\mathbf{b}\|_p^p)$;

(ii) les supports de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont disjoints.

Preuve Soit $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par

$$c_n = |a_n + b_n|^p + |a_n - b_n|^p - 2(|a_n|^p + |b_n|^p),$$

où $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Par le lemme précédent, on a soit $c_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $c_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Si (i) est satisfaite, alors $\sum_{n\in\mathbf{N}} c_n = 0$. Comme c_n est de signe constant, il s'ensuit que $c_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Le cas d'égalité du lemme précédent implique alors que $a_n b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, c-à-d $\mathrm{supp}(\mathbf{a}) \cap \mathrm{supp}(\mathbf{b}) = \emptyset$.

Réciproquement, il est évident que (ii) implique (i). ■

Preuve du Théorème 1 Soit $U \in \mathbf{O}(\ell^p)$. Pour $i \in \mathbf{N}$, notons $\mathbf{e}^i \in \ell^p$ la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec $a_i = 1$ et $a_n = 0$ pour $n \neq i$.

Comme les supports des $\mathbf{e}^i$ sont disjoints, on a

$$\|\mathbf{e}^i + \mathbf{e}^j\|_p^p + \|\mathbf{e}^i - \mathbf{e}^j\|_p^p = 2(\|\mathbf{e}^i\|_p^p + \|\mathbf{e}^j\|_p^p) \qquad \forall \quad i \neq j.$$

Posons $\mathbf{f}^i = U\mathbf{e}^i$. On observera que, pour tout $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^p$, on a $\mathbf{x} = \sum_{i\in\mathbf{N}} x_i \mathbf{e}^i$ (convergence dans ℓ^p) et donc

$$(*) \qquad U\mathbf{x} = \sum_{i\in\mathbf{N}} x_i U\mathbf{e}^i = \sum_{i\in\mathbf{N}} x_i \mathbf{f}^i.$$

Comme $\|U\mathbf{e}^i\|_p = \|\mathbf{e}^i\|_p$ et

$$\|U\mathbf{e}^i \pm U\mathbf{e}^j\|_p = \|U(\mathbf{e}^i \pm \mathbf{e}^j)\|_p = \|\mathbf{e}^i \pm \mathbf{e}^j\|_p,$$

il s'ensuit que l'on a

$$\|\mathbf{f}^i + \mathbf{f}^j\|_p^p + \|\mathbf{f}^i - \mathbf{f}^j\|_p^p = 2\left(\|\mathbf{f}^i\|_p^p + \|\mathbf{f}^j\|_p^p\right) \qquad \forall \quad i \neq j.$$

Le Corollaire 4 montre alors que

$$\mathrm{supp}(\mathbf{f}^i) \cap \mathrm{supp}(\mathbf{f}^j) = \emptyset \qquad \forall \quad i \neq j.$$

Ceci implique que le support de chaque $\mathbf{f}^i$ est un singleton.

En effet, supposons, par l'absurde, que le support d'un $\mathbf{f}^i = (f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne soit pas un singleton. Comme $\mathbf{f}^i \neq 0$, il existe donc des entiers $n \neq m$ tels que $f_n \neq 0$ et $f_m \neq 0$. Mais, comme U est surjective, il existe $\mathbf{x} = (x_n) \in \ell^p$ tel que $U\mathbf{x} = \mathbf{e}^n$. Par la formule $(*)$, on a nécessairement $x_i \mathbf{f}^i = \mathbf{e}^n$; d'où $x_i f_n = 1$ et $x_i f_m = 0$, ce qui est absurde.

Pour tout $i \in \mathbf{N}$, il existe donc un unique $\sigma(i) \in \mathbf{N}$ tel que $\operatorname{supp}(\mathbf{f}^i) = \{\sigma(i)\}$, c-à- d $\mathbf{f}^i = \varepsilon_i \mathbf{e}^{\sigma(i)}$ pour un $\varepsilon_i \in \mathbf{R}$. Comme $\|\mathbf{f}^i\|_p = 1$, on a $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$.

L'application $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est injective car les supports $\mathbf{f}^{i_1}$ de $\mathbf{f}^{i_2}$ sont disjoints pour $i_1 \neq i_2$.

L'application σ est surjective. En effet, supposons qu'il existe $i \in \mathbf{N}$ qui ne soit pas dans l'image de σ. Alors, par $(*)$, on aurait $U\mathbf{x} \neq \mathbf{e}^i$ pour tout $\mathbf{x} \in \ell^p$.

Finalement, on a bien, de nouveau par $(*)$,

$$U((x_n)_{n\in\mathbf{N}}) = (\varepsilon_n x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbf{N}}, \qquad \forall \quad (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^p. \qquad \blacksquare$$

Remarque 5 (i) Le Théoreme 1 admet la version suivante pour l'espace $L^p = L^p([0,1], \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue.

Soit $U \in \mathbf{O}(L^p)$ pour $p \in [1, \infty[, p \neq 2$. Alors, il existe une bijection mesurable $T : [0,1] \to [0,1]$ d'inverse mesurable telle que $T(N)$ soit de mesure nulle pour tout ensemble Lebesgue-mesurable N de mesure nulle ainsi qu'une fonction mesurable h à valeurs dans $\{\pm 1\}$ telles que

$$Uf(x) = h(x) f(T(x)) \left(\frac{dT_*\lambda}{d\lambda}(x) \right)^{1/p} \qquad \forall f \in L^p, x \in [0,1].$$

On a noté par $T_*\lambda$ la mesure image de λ par T et par $\dfrac{dT_*\lambda}{d\lambda}$ sa dérivée de Radon-Nikodym; plus concrètement, on a

$$\frac{dT_*\mu}{d\mu}(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(T^{-1}([x, x+h]))}{h}.$$

Ce théorème est énoncé dans le Chapitre XI du livre de Banach "Théorie des opérations linéaires". Banach n'en a pas publié la preuve, comme il l'annonçait dans ce livre. Ceci a été fait par J. Lamperti dans Pacific J. Math. 8 (1958), 459–466.

(ii) Par des méthodes similaires à celles de la preuve du Théorème 1 , on peut montrer que ℓ^p et ℓ^q ne sont pas isomorphes comme espaces de Banach pour $p \neq q$, c-à-d qu'il n'existe pas de bijection linéaire continue $\ell^p \to \ell^q$.

Exercice 6 Soit $E = \mathbf{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$. Déterminer par une autre méthode –de nature plus géométrique– le groupe $\mathbf{O}(E)$.