

Réseaux téléphoniques, graphes et théorie des groupes

(Partie II: Outils mathématiques)

IRMAR UMR-CNRS 6625
Université Rennes 1

Les graphes de Margulis

Pour tout nombre entier n , on construit un graphe G_n à n^2 sommets et au plus $8n^2$ arêtes comme suit :

- **sommets** : les sommets sont les paires (i, j) , où i et j sont des nombres entiers entre 0 et $n - 1$;

- **arêtes** : on relie (i, j) avec les 8 sommets (non nécessairement tous distincts)

$$([i + j], j), (i, [i + j]), ([i + 1], j), (i, [j + 1]),$$
$$([i - j], j), (i, [i - j]), ([i - 1], j), (i, [j - 1]),$$

où, par exemple, $[i + j]$ est le reste de la division de $i + j$ par n (c'est bien un nombre compris entre 0 et $n - 1$).

Le nombre k est donc ici 8. On peut montrer que la constante d'expansion c est plus grande que 0.15.

Marches aléatoires

On peut insuffler un peu de "vie" à un graphe en considérant une marche aléatoire sur celui-ci. Imaginons un promeneur qui se déplace au hasard sur les sommets d'un graphe k -régulier G : s'il se trouve sur un sommet, on suppose qu'il se déplacera à l'instant suivant vers un des k sommets qui lui sont reliés avec la même probabilité $1/k$. On s'intéresse à la position du promeneur après un grand nombre de pas N . La répartition des positions possibles tend vers la répartition uniforme (celle où le promeneur peut être n'importe où avec la même probabilité), à la vitesse $(c/k)^N$.

Dans le cas d'une famille de graphes magiques, cette vitesse est donc essentiellement indépendante de la taille du graphe : le promeneur explore avec la même vitesse exponentielle un graphe de taille arbitrairement grande, bien que, à chaque instant, il n'ait que k possibilités de se déplacer !

Autres applications

Les graphes magiques ont trouvé de nouvelles et spectaculaires applications - quelques unes très récentes -

- **en informatique théorique** :

codes correcteurs d'erreur, "derandomization" d'algorithmes, cryptographie

- **en mathématiques** :

théorie des graphes, analyse combinatoire, géométrie des espaces de Banach, géométrie non commutative.

D'autres applications attendent certainement d'être découvertes.

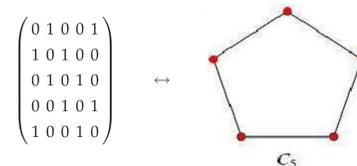
Les outils mathématiques

Voici quelques-uns des outils mathématiques mis en jeu pour montrer que les graphes G_n forment bien une famille de graphes magiques. Pour le mathématicien, ce qui importe encore plus, c'est de [comprendre](#) le "mécanisme" qui est responsable de leurs propriétés.

- **matrices, valeurs propres** :

la donnée d'un graphe G avec n sommets est entièrement capturée par une matrice A de taille $n \times n$, la matrice d'incidence du graphe : c'est un tableau à n lignes et n colonnes formé de 1 et de 0 ; à l'intersection de la ligne i et de la colonne j , on écrit 1 ou 0, selon qu'il y a ou qu'il n'y a pas d'arête entre les sommets i et j .

Exemple : Matrice d'incidence du graphe cyclique C_5 à 5 sommets :



Supposons que, de chaque sommet, partent exactement k arêtes (on dit que le graphe est k -régulier). Comme toute matrice, A possède un **spectre** : c'est la liste de ses valeurs propres. Dans ce cas (la matrice étant symétrique), c'est une suite de n nombres qu'on rangera par ordre décroissant $\lambda_0 = k \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$. Le coefficient d'expansion c de G est essentiellement égal au **trou spectral** $k - \lambda_1$.

Exemple : Les valeurs propres de la matrice d'incidence du graphe cyclique C_5 à 5 sommets sont

$$\lambda_0 = k = 2, \lambda_1 = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \lambda_2 = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right), \lambda_3 = 2 \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right), \lambda_4 = 2 \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right).$$

Le trou spectral est donc $2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Plus généralement, pour le graphe C_n , le trou spectral est $2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$; il tend vers 0 quand n devient grand.

- **groupes, représentations** :

Pour expliquer les propriétés des graphes G_n de Margulis, il faut plutôt se concentrer sur leurs matrices d'incidence A_n : elles fournissent le plan de construction de ces graphes. (D'ailleurs, Margulis a d'abord découvert les matrices A_n et construit alors les graphes G_n !)

La matrice A_n provient d'une représentation d'un certain groupe Γ (le groupe $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}^2$, produit semi-direct du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ des matrices 2×2 à coefficients entiers et de déterminant 1 par le groupe \mathbb{Z}^2). Le groupe Γ possède une représentation naturelle π_n par des matrices $n^2 \times n^2$. La matrice A_n est tout simplement la somme de matrices $\pi_n(\gamma_1) + \dots + \pi_n(\gamma_8)$, pour 8 générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_8$ convenables de Γ .

- **propriété (T) de Kazhdan** :

Les groupes tels que Γ ont une propriété de **rigidité spectrale** ; c'est une propriété de leurs représentations telles que les π_n . Elle implique l'existence d'une borne inférieure pour les trous spectraux $k - \lambda_1$ des matrices d'incidence A_n , et ceci **indépendamment** de n .

Pour en savoir plus

[G. Davidoff, P. Sarnak et A. Valette](#). Elementary number theory, group theory, and Ramanujan graphs, Cambridge University Press, 2003.

[A. Lubotzky](#). Discrete groups, expanding graphs and invariant measures, Birkhäuser, 1994.

[O. Reinold, S. Vadhan et A. Wigderson](#). Entropy waves, the zig-zag graph product, and new constant-degree expanders, Annals of Mathematics **155**, 2002.

[P. Sarnak](#). Some applications of modular forms, Cambridge University Press, 1990.

Pour la propriété de Kazhdan, on peut consulter la page :

<http://name.math.univ-rennes1.fr/bachir.bekka>