**Université de Rennes 1–Année 2018/2019**

**L3–Géométrie et isométries–Feuille de TD 11**

**Exercice 1. (Exemples d'étude d'isométries affines de l'espace)** Montrer que chacune des applications $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ suivantes est une isométrie affine et identifier sa nature géométrique et ses éléments caractéristiques.

$$\text{(i)}\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)}\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+2 \\ -x+4 \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{(iii)}\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+1 \\ x+1 \\ y-2 \end{pmatrix} \qquad \text{(iv)}\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z+1 \\ -x-1 \\ -y \end{pmatrix}$$

$$\text{(v)}\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2x+2y-z+1) \\ \frac{1}{3}(-x+2y+2z) \\ \frac{1}{3}(2x-y+2z-1) \end{pmatrix} \qquad \text{(vi)}\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2x+2y-z) \\ \frac{1}{3}(-x+2y+2z-1) \\ \frac{1}{3}(2x-y+2z-2) \end{pmatrix}$$

$$\text{(vii)}\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}(x-8y-4z+2) \\ \frac{1}{9}(-8x+y-4z+2) \\ \frac{1}{9}(-4x-4y+7z+1) \end{pmatrix} \qquad \text{(viii)}\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9}x+\frac{4}{9}y-\frac{4}{9}z+1 \\ -\frac{4}{9}x+\frac{8}{9}y+\frac{1}{9}z+1 \\ \frac{4}{9}x+\frac{1}{9}y+\frac{8}{9}z+1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2. (Groupes finis d'isométries planes)** Soit $E$ le plan euclidien, Soit $\mathrm{Iso}^+(E)$ le groupe des isométries affines directes de $E$ et $T = \{t_v \mid v \in E\}$ le sous-groupe distingué de $\mathrm{Iso}^+(E)$ formé des translations.

(i) Soient $R_1, R_2 \in \mathrm{Iso}^+(E)$ deux rotations de même centre $A \in E$. Montrer que $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

(ii) Soient $R_1, R_2 \in \mathrm{Iso}^+(E)$ deux rotations de centres respectifs $A, B$ avec $A \neq B$. Soit $f = R_1 \circ R_2 \circ R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$ (appelé *commutateur* de $R_1$ et $R_2$). Montrer que $f$ est une translation et que $f \neq \mathrm{Id}_E$. *Indication :* Pour montrer que $f \neq \mathrm{Id}_E$, on pourra montrer que $f(B) \neq B$.

A partir de maintenant, on considère un sous-groupe *fini* $G$ de $\mathrm{Iso}^+(E)$, de cardinal $n \geq 1$.

(iii) Montrer que $G \cap T = \{\mathrm{Id}_E\}$. *Indication :* On pourra observer que si $t_v \in G$, alors $t_v^k \in G$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

(iv) Montrer que tous les éléments de $G$ sont des rotations, ayant toutes le *même* centre $A$. *Indication :* On pourra utiliser (ii)

(v) Montrer que l'homomorphisme de groupes $\Phi : G \to O^+(E)$, $f \mapsto \vec{f}$ est injectif.

(vi) Montrer que $\Phi(G)$ est un sous-groupe de $O^+(E)$ de cardinal $n$.

(vii) Montrer que $\Phi(G) = \{r_{k\theta} \mid 0 \leq k < n\}$ pour $\theta = 2\pi/n$, où $r_\alpha$ désigne est la rotation vectorielle d'angle $\alpha$. En déduire une description de $G$.