Université de Rennes 1
Année 2018/2019

Licence 3-CAPES

Géométrie et isométries – CC2 du 27/11/2018

Exercice 1. (4P.) Dans le plan $\mathbf{R}^2$ on considère le point $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la rotation de centre A et d'angle $\theta = \pi/4$. Donner l'expression de $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en fonction de x, y.

Solution : La rotation vectorielle R_θ d'angle $\theta = \pi/4$ est donnée par $R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}x/2 - \sqrt{2}y/2 \\ \sqrt{2}x/2 + \sqrt{2}y/2 \end{pmatrix}$; comme $R_\theta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, on a donc, pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}x/2 - \sqrt{2}y/2 - 1 + \sqrt{2} \\ \sqrt{2}x/2 + \sqrt{2}y/2 + 1) \end{pmatrix}.$$

On a bien $\vec{f} = R_\theta$ et $f(A) = A$.

Exercice 2. (6P.) Soit $a \in \mathbf{R}$. On considère l'application affine $f_a : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + a \\ x - a \end{pmatrix}$.

(i) Montrer que f_a est une isométrie.

Solution : La matrice de la partie linéaire $\vec{f_a}$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on vérifie que ${}^tAA = I_2$ (c-à-d que A est orthogonale). Donc $\vec{f_a}$ est une isométrie vectorielle et f_a une isométrie affine.

(ii) Déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques de $\overrightarrow{f_a}$.

Solution : L'ensemble $\mathrm{Inv}(\vec{f_a})$ des points fixes de $\vec{f_a}$ est l'ensemble des $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ qui vérifient l'équation $AX = X$, dont l'ensemble des solutions est $\mathbf{R}X_0$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par conséquent, $\vec{f_a}$ est une réflexion orthogonale d'axe $D = \mathbf{R}X_0$.

(iii) Déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques de f_a.

Solution : L'ensemble $\mathrm{Fix}(f_a)$ des points fixes de f est l'ensemble des $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ qui vérifient l'équation $AX + \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} = X$, dont l'ensemble des solutions est $\begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} + \mathbf{R}X_0$. Par conséquent, f est la réflexion orthogonale d'axe $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} + \mathbf{R}X_0$.

Exercice 3. (8P.) On considère l'application affine $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ définie par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2x - y + 2z \\ 2x - 2y + z \\ x + 2y + 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(i) Montrer que f est une isométrie.

Solution : La matrice de la partie linéaire $\vec{f}$ est $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2x - y + 2z \\ 2x - 2y + z \\ x + 2y + 2z \end{pmatrix}$ et on vérifie que que ${}^tAA = I_3$ (c-à-d que A est orthogonale.). Donc $\vec{f}$ est une isométrie vectorielle et f une isométrie affine.

(ii) Déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques de $\overrightarrow{f}$.

Solution : On calcule que $\det(A) = 1$. Donc $\overrightarrow{f}$ est une rotation. L'ensemble $\mathrm{Inv}(\vec{f})$ des points fixes de $\vec{f}$ est l'ensemble des $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ qui vérifient l'équation $AX = X$, dont l'ensemble des solutions est $\mathbf{R}X_0$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Pour l'angle de rotation θ, on a $1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{trace}(A) = -2/3$ et donc $\theta = \pm \arccos(-5/6)$. Pour déterminer le signe, on calcule le signe de $\det(X, AX, X_0)$ avec (par exemple) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; on trouve

$$\begin{vmatrix} 1 & -2/3 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 3 \end{vmatrix} = 5/3 > 0$$

et donc $\theta = +\arccos(-5/6)$ (i.e $\theta \in [0, \pi[$ avec $\cos(\theta) = -5/6 > 0$.

(iii) Déterminer la nature géométrique et les éléments caractéristiques de f.

Solution : L'ensemble $\mathrm{Fix}(f)$ des points fixes de f est l'ensemble des $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ qui vérifient l'équation $AX + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = X$; le calcul montre qu'il n'y a pas de solution : $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$. Donc f est un vissage. Comme $f = t_{X_0} \circ \vec{f}$ et comme $X_0 \in \mathrm{Inv}\,\vec{f} = \mathbf{R}X_0$, il s'ensuit que f est un vissage de direction $\mathbf{R}X_0 = \mathbf{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, d'angle θ et de vecteur de translation $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. (6P.) Soit $\mathcal{P}$ un plan affine.

(i) Soit $h_{A,\lambda}$ une homothétie de centre $A \in \mathcal{P}$ et de rapport $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que, pour tous $M, N \in \mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{h_{A,\lambda}(M)h_{A,\lambda}(N)} = \lambda\overrightarrow{MN}$.

Solution : Comme $h_{A,\lambda}$ est affine et comme $\overrightarrow{h_{A,\lambda}}$ est l'homothétie vectorielle h_λ, on a, pour tous $M, N \in \mathcal{P}$: $\overrightarrow{h_{A,\lambda}(M)h_{A,\lambda}(N)} = \overrightarrow{h_{A,\lambda}}(\overrightarrow{MN}) = h_\lambda(\overrightarrow{MN}) = \lambda\overrightarrow{MN}$.

(ii) Soit $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ une application affine. On suppose qu'il existe un point $O \in \mathcal{P}$ et un scalaire $\lambda \neq 1$ tels que $\overrightarrow{f(O)f(N)} = \lambda\overrightarrow{ON}$ pour tout $N \in \mathcal{P}$. Soit $A \in \mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{1-\lambda}\,\overrightarrow{Of(O)}$. Montrer que A est un point fixe de f et en déduire que $f = h_{A,\lambda}$.

Solution : Par la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{Of(A)} = \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f(O)f(A)}$ et donc $\overrightarrow{Of(A)} = 1 - \lambda\,\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}$. D'où $A = f(A)$. Comme, par hypothèse, $\overrightarrow{f(O)f(N)} = \lambda\overrightarrow{ON}$ pour tout $N \in \mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{f} = h_\lambda$. Il s'ensuit que $f = h_{A,\lambda}$.