Université de Rennes 1 **Année 2015/2016**

Théorie Ergodique des actions de groupes-M2

Feuille de TD 2

Exercice 1. (Expression de la mesure de Haar de $SL_2(\mathbf{R})$ dans les décompositions de Cartan et d'Iwasawa) Soit $G = SL_2(\mathbf{R})$. Pour $g \in G$, on considère les décompositions de Cartan et d'Iwasawa :

$$g = k(\theta_1)a(s)k(\theta_2) \in KA^+K, \quad g = k(\theta)a(s)n(x) \in KAN,$$

où $k(\theta)$ est la rotation d'angle $2\pi\theta$ avec $\theta \in [0, 1[$, $a(s) = \mathrm{diag}(s, s^{-1})$ avec respectivement $s > 1$ et $s > 0$ et $n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbf{R}$.

(i) Montrer que la formule

$$f \mapsto \int_0^1 \int_1^{+\infty} \int_0^1 f(k(\theta_1)a(s)k(\theta_2))(s^2 - s^{-2})d\theta_1 \frac{ds}{s} d\theta_2 \qquad \text{pour tout} \quad f \in C_c(G)$$

définit une mesure de Haar m_G sur G.

(ii) Montrer que la formule

$$f \mapsto \int_0^1 \int_0^{+\infty} \int_0^1 f(k(\theta)a(s)n(x))d\theta s ds dx \qquad \text{pour tout} \quad f \in C_c(G)$$

définit une mesure de Haar m_G sur G.

Exercice 2. (Volume de boules dans $SL_2(\mathbf{R})$) On considère la norme euclidienne $\| \cdot \|$ sur $\mathbf{R}^2$ et la norme associée sur $G = SL_2(\mathbf{R})$. Pour $r > 0$, soit $B_r = \{g \in G \ : \ \|g\| \leq r\}$ la boule de rayon r dans G et $v_r = m_G(B_r)$ son volume. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $v_r = Cr^2$ pour tout $r > 0$.

[*Indication :* utiliser la formule de l'exercice 1 donnant l'expression de la mesure de Haar m_G dans la décomposition de Cartan.]

Exercice 3. (Critère de non existence d'un trou spectral) Soient G un groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts et $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de G.

(i) On suppose qu'il existe une *suite* de vecteurs $(\xi_n)_n$ dans $\mathcal{H}$ avec $\|\xi_n\| = 1$ pour tout n et tels que, pour tout $g \in G$, on a :

$$\lim_n \|\pi(g)\xi_n - \xi_n\| = 0.$$

Montrer que π ne possède pas la propriété de trou spectral.

[*Indication :* Utiliser le lemme de Baire.]

(ii) On suppose maintenant que, pour toute partie finie $F \subset G$, il existe une suite de vecteurs $(\xi_n^F)_n$ dans $\mathcal{H}$ avec $\|\xi_n^F\| = 1$ pour tout n et tels que, pour tout $g \in F$, on a :

$$\lim_n \|\pi(g)\xi_n^F - \xi_n^F\| = 0.$$

La conclusion de (i) subsiste-t-elle ?

[*Indication :* On pourra considérer le groupe compact $G = \mathbf{S}^1$ et π un caractère unitaire convenable de G.]

Exercice 4. (Densité des densités dans les moyennes) Soit (X, m) un espace mesuré, $\mathrm{Moy}(X, m)$ l'ensemble des moyennes sur (X, m) et

$$L^1(X)_{1,+} = \{f \in L^1(X, m) \ : \ f \geq 0, \int_X f dm = 1\}$$

l'ensemble des densités sur (X, m), vu comme partie de $\mathrm{Moy}(X, m)$.

Montrer que le convexe $L^1(X)_{1,+}$ est dense dans $\mathrm{Moy}(X, m)$, pour la topologie faible $\sigma(L^\infty(X)', L^\infty(X))$.

[*Indication :* Raisonner par l'absurde, en utilisant la version géométrique du théorème de Hahn-Banach sur la séparation de convexes par des hyperplans dans les espaces vectoriels localement convexes (voir, par exemple, Rudin : Functional analysis)]

Exercice 5. (Propriété (T) de Kazhdan pour $SL_n(\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n$)
(i) Soit $G = SL_n(\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n$, le produit semi-direct de groupes, donné par l'action standard de $SL_n(\mathbf{R})$ sur $\mathbf{R}^n$. Montrer que G possède la propriété (T) de Kazhdan pour $n \geq 3$.

[*Indication :* Utiliser le fait que $SL_n(\mathbf{R})$ possède la propriété (T) de Kazhdan pour $n \geq 3$ en combinaison avec le Lemme de Mautner.]

(ii) Montrer que $\Gamma = SL_n(\mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^n$, muni de la topologie discrète, possède la propriété (T) de Kazhdan pour $n \geq 3$.

Exercice 6. (Quelques groupes ne possédant pas la propriété (T)) Soit $n \geq 2$.
(i) Montrer que $GL_n(\mathbf{R})$ ne possède *pas* la propriété (T) de Kazhdan.
(ii) Montrer que $SL_n(\mathbf{Q})$, muni de la topologie discrète, ne possède *pas* la propriété (T) de Kazhdan.
(iii) Généraliser (ii) à $SL_n(\mathbf{K})$ pour tout corps dénombrable infini $\mathbf{K}$.