Université de Rennes 1 **Année 2015/2016**

Théorie Ergodique des actions de groupes-M2-TD1

Exercice 1. (Densité des orbites d'une action ergodique) Soient G un groupe localement compact, X un espace métrique séparable et $G \curvearrowright X$ une action continue. Soit m une mesure G quasi-invariante sur les boréliens de X telle que $m(U) > 0$ pour tout ouvert non vide $U \subset X$. On suppose que m est ergodique pour l'action de G.

Montrer qu'il existe un ensemble borélien X' de X avec $m(X \setminus X') = 0$ tel que, pour tout $x \in X'$, l'orbite Gx de x est dense dans X.

[*Indication :* Soit $(U_n)_n$ une base dénombrable d'ouverts de X; que peut-on dire de $\cap_n(\cup_{g\in G}\, gU_n)$?]

Exercice 2. (Essentielle transitivité des actions ergodiques d'un groupe compact) Soient G un groupe compact, X un espace métrique séparable et $G \curvearrowright X$ une action continue. Soit m une mesure G quasi-invariante sur les boréliens de X. On suppose que m est ergodique pour l'action de G.

Montrer qu'il existe $x \in X$ tel que $m(X \setminus Gx) = 0$. En déduire une classification des actions ergodiques de G sur un espace métrique séparable muni d'une mesure quasi-invariante, à ensemble de mesure nulle près.

[*Indication :* Montrer d'abord que deux orbites distinctes de X peuvent être séparées par des ouverts G-invariants.]

Exercice 3. (Théorème de dualité de Moore) Soient G un groupe localement compact à base dénombrable d'ouverts et H_1, H_2 deux sous-groupes fermés de G.

(i) Montrer que l'action $H_1 \curvearrowright G/H_2$ est ergodique si et seulement si l'action $H_2 \curvearrowright G/H_1$ est ergodique

[*Indication :* On pourra utiliser le fait que, pour un sous-groupe fermé H, une fonction mesurable $f : G/H \to \mathbf{R}$ est 0 presque partout sur G/H si et seulement si elle est $f \circ p$ est 0 presque partout sur G, où $p : G \to G/H$ est l'application canonique.]

Exercice 4. (Groupe de Heisenberg) Soit G le sous-groupe de $GL_3(\mathbf{R})$ formé des matrices $\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour $x, y, z \in \mathbf{R}$.

(i) Déterminer le centre Z de G ainsi que la structure de G/Z.

(ii) Montrer que G est topologiquement isomorphe à $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$, muni du produit $((x, y), s)((x', y'), t) = ((x + x', y + y'), s + t + xy' - x'y)))$.

(ii) Montrer que la mesure de Lebesgue m on $\mathbf{R}^3$ est une mesure de Haar à gauche et à droite sur G.

(iii) Montrer que $SL_2(\mathbf{R})$ agit par automorphismes sur G

Tourner la page s.v.p.

(iv) Montrer que $\Lambda = \{((x,y),s) \ : \ x,y \in \mathbf{Z}^2, s \in \mathbf{Z}\}$ est un réseau dans G et que l'action de $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$ sur G induit une action de Γ sur la nilvariété $X := N/\Lambda$ préservant une mesure de probabilité.

Exercice 5. (Actions faiblement mélangeantes) Soit G un groupe localement compact avec une action mesurable sur un espace de probabilité (X,m) préservant m.

On se propose de montrer que $G \curvearrowright (X,m)$ est faiblement mélangeante si et seulement si $G \curvearrowright (X \times X, m \otimes m)$ est ergodique.

Supposons que $G \curvearrowright (X,m)$ est faiblement mélangeante et soit k une fonction G-invariante dans $L_0^2(X \times X)$. Soit $K : L^2(X) \mapsto L^2(X)$ l'opérateur intégral défini par k.
(i) Montrer que K ainsi que K^* commutent avec tous les opérateurs $\pi_{X\times X}(g)$.
(ii) Montrer que K est un multiple de la projection orthogonale sur $\mathbf{C1}_X$ et donc que k est constant $m \otimes m$ -presque partout.
[*Indication :* On pourra considérer la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints $T + T^*$ et $i(T - T^*)$.]

Supposons maintenant que $G \curvearrowright (X \times X, m \otimes m)$ est ergodique. Soit V un sous-espace de $L^2(X)$ qui est G-invariant et de dimension finie. Soit $\{f_1, \dots, f_n\}$ une base orthonormée de V. Soit $k \in L_0^2(X \times X)$ définie par $k(x,y) = \sum_{i=1}^n f_i(x)\overline{f_i(y)}$.
(iii) Montrer que k est G-invariante et conclure que $V = \{0\}$.

Exercice 6. (Le mélange fort implique le mélange faible (ouf !)) Soit G un groupe localement compact, (X,m) un espace de probabilité et $G \curvearrowright (X,m)$ une action mesurable préservant m.
(i) On suppose que G est fortement mélangeante et que G n'est pas compact. Montrer que $G \curvearrowright (X,m)$ est faiblement mélangeante.
(ii) Montrer que si $G \curvearrowright (X,m)$ est faiblement mélangeante, il n'est pas vrai que $G \curvearrowright (X,m)$ est faiblement mélangeante pour tout sous-groupe fermé non compact H de G.

Exercice 7. (Mélange fort des actions de Bernoulli) Soit Γ un groupe dénombrable infini. Montrer que son action de Bernoulli $\Gamma \curvearrowright (X,m)$ sur $X = \{0,1\}^\Gamma$ est fortement mélangeante.

Exercice 8. (Ergodicité d'actions ne préservant pas une probabilité) Soit Γ un réseau dans $SL_n(\mathbf{R})$, par exemple $\Gamma = SL_n(\mathbf{Z})$.
(i) Montrer que la restriction à Γ de l'action linéaire de $SL_n(\mathbf{R})$ sur $\mathbf{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue, est ergodique.
(ii) Montrer que la restriction à Γ de l'action naturelle de $SL_n(\mathbf{R})$ sur l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathbf{R}^n)$, muni de la mesure de Lebesgue, est ergodique.
[*Indication :* Pour (i) et (ii), utiliser l'Exercise **??**.]