**Université de Rennes 1**
**Année 2010/2011**

**Master 2**

**Théorie Ergodique et Systèmes Dynamiques–TD3**

**1 - (Ergodicité d'un système induit)** - Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique préservant une mesure de probabilité. Pour $A \in \mathcal{B}$ avec $\mu(A) > 0$, On considère le sytème induit $(A, \mathcal{A}, \mu_A, T_A)$ (voir Feuille de TD 1). Montrer que $T_A$ est ergodique si $T$ est ergodique.

**2 - (Extension inversible)** - Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique préservant une mesure de probabilité. On définit

- $\widetilde{X} = \{(x_n)_{n \in \mathbf{Z}} \ : \ x_n \in X, \ x_{n+1} = Tx_n, \quad \forall\, n \in \mathbf{Z}\}$;
- $\widetilde{T} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}, \qquad \widetilde{T}((x_n)_{n \in \mathbf{Z}}) = (x_{n+1})_{n \in \mathbf{Z}}$;
- $\widetilde{\mathcal{B}}$ la tribu engendrée par les parties $p_n^{-1}(A)$ avec $A \in \mathcal{B}$, où $p_n : \widetilde{X} \to X$ est définie par $p_n((x_k)_{k \in \mathbf{Z}}) = x_n$;
- $\widetilde{\mu}$ la mesure de probabilité sur $\widetilde{\mathcal{B}}$ définie par $\widetilde{\mu}(p_n^{-1}(A)) = \mu(A)$.

(i) Montrer que $\widetilde{T}$ préserve la mesure $\widetilde{\mu}$, que $\widetilde{T}$ est inversible et que $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{B}}, \widetilde{\mu}, \widetilde{T})$ est une extension du système $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$.
(ii) Soit $(Y, \mathcal{A}, \nu, S)$ une extension de $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ telle que $S$ est invertible. Montrer que $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{B}}, \widetilde{\mu}, \widetilde{T})$ est un facteur de $(Y, \mathcal{A}, \nu, S)$.
(iii) $(*)$ Soit $X_2 = \mathbf{S}^1$ et $T_2 : X \to X, x \mapsto 2x$. Montrer que $\widetilde{X}_2$ est un groupe abelien compact.
(iv) $(*)$ Soit $\mathbf{Z}[1/2]$ le sous-anneau de $\mathbf{R}$ engendré par $\mathbf{Z}$ et $1/2$. Soit $\mathbf{Q}_2$ le corps des nombres 2-adiques et $\mathbf{Z}_2$ le sous-anneau compact des entiers 2-adiques. Montrer que l'image de l'homomorphisme injectif

$$\delta : \mathbf{Z}[1/2] \to \mathbf{R} \times \mathbf{Q}_2, \ r \mapsto (r, r)$$

est un sous-groupe discret de $\mathbf{R} \times \mathbf{Q}_2$. En déduire que $\widetilde{X}_2$ s'identifie au groupe compact quotient $(\mathbf{R} \times \mathbf{Q}_2)/\delta(\mathbf{Z}[1/2])$. Décrire $\widetilde{T}_2$ dans cette identification.

**3 - (Automorphismes non hyperboliques du tore)** Pour $d \geq 1$, soit $X = \mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d$ le tore $d$-dimensionnel, muni de la mesure de Lebesgue $\lambda$. Pour $A \in GL_d(\mathbf{Z})$, soit $T_A : X \to X$ l'automorphisme associé.

(i) On suppose que $T_A$ est ergodique et que $d \leq 3$. Montrer qu'aucune valeur propre de $A$ n'est de module 1.

Soit $A \in SL_4(\mathbf{Z})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

(ii) Montrer que $A$ possède deux valeurs propres de module 1.
(iii) Montrer que $T_A$ est ergodique. (*Indication:* montrer que le polynôme caractéristique de $A$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$.)

**4 - (Mélange fort des automorphismes ergodiques du tore)** Pour $d \geq 1$, soit $X = \mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d$ le tore $d$-dimensionnel, muni de la mesure de Lebesgue $\lambda$. Pour $A \in GL_d(\mathbf{Z})$, soit $T_A : X \to X$ l'automorphisme associé.
(i) On suppose que $T_A$ est ergodique. Montrer que $T_A$ est fortement mélangeante. (*Indication:* analyse de Fourier).
(ii) Soit $x \in \mathbf{Q}^d/\mathbf{Z}^d$. Montrer que $x$ est un point périodique: l'orbite de $x$ sous $T_A$ est finie.
(iii) Montrer que $T_A$ n'est pas uniquement ergodique.

**5 - (Unique ergodicité et sommes de Birkhoff)** Soit $X = \mathbf{S}^1 \times [0,1]$. Pour $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, soit $T : X \to X$ définie par $T(x,t) = (x+\alpha, t)$ Montrer que, pour tout $f \in C(X)$, les sommes de Birkhoff

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n$$

convergent uniformément sur $X$ mais que $T$ n'est pas uniquement ergodique.

**6 -(Ergodicité de la transformation de Gauß)** Soit $T : [0,1] \to [0,1]$ la transformation de Gauß (voir Feuille TD 2). On note $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ On rappelle que la mesure de probabilité $\mu$ sur $[0,1]$ de densité $\frac{1}{\log 2}\frac{1}{1+x}$ par rapport à $\lambda$ est $T$-invariante. On se propose de montrer que $\mu$ est ergodique.

Pour tout entier $a \geq 1$, on note $\psi_a$ la fonction sur $[0,1]$ définie par $\psi_a(x) = 1/(a+x)$.

Soit $n \geq 1$ et soit une suite $a_1, \ldots, a_n$ d'entiers $\geq 1$. On pose

$$\psi_{a_1,\ldots,a_n} = \psi_{a_1} \circ \cdots \circ \psi_{a_n}.$$

Soit $\Delta_n = \psi_{a_1,\ldots,a_n}([0,1])$.
(i) Montrer que $\psi_{a_1,\ldots,a_n}$ est monotone. En déduire que

$$\lambda(\Delta_n) = |\psi_{a_1,\ldots,a_n}(1) - \psi_{a_1,\ldots,a_n}(0)|.$$

Pour $x \in ]0,1]$ et $n \geq 1$, on pose $a_n(x) = [1/T^{n-1}(x)]$ (partie entière).
(ii) Vérifier que $\psi_{a_1(x),\ldots,a_n(x)}(T^n x) = x$.
(iii) Montrer que $\Delta_n = \{x \in [0,1] \ : \ a_k(x) = a_k, \ \forall k = 1, \ldots n\}$.
(iv) Soient $0 \leq a < b \leq 1$. Montrer que

$$\lambda(T^{-n}([a,b]) \cap \Delta_n) = |\psi_{a_1,\ldots,a_n}(b) - \psi_{a_1,\ldots,a_n}(a)|.$$

(v) Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ qu'il existe des entiers positifs $p_n, q_n, r_n, s_n$ avec $s_n \leq r_n$ tels que

$$\psi_{a_1,\ldots,a_n}(x) = \frac{p_n + q_n x}{r_n + s_n x} \qquad \forall x \in [0,1].$$

(vi) Soient $0 \leq a < b \leq 1$. Montrer qu'on a l'inégalité

$$\frac{1}{2}\lambda([a,b]) \leq \frac{\lambda\left(T^{-n}([a,b]) \cap \Delta_n\right)}{\lambda(\Delta_n)} \leq 2\lambda([a,b])$$

(vii) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $A \subset [0,1]$ mesurable, on a l'inégalité

$$\frac{1}{C}\mu(A) \leq \frac{\mu\left(T^{-n}(A) \cap \Delta_n\right)}{\mu(\Delta_n)} \leq C\mu(A)$$

(viii) Soit $A \subset [0,1]$ un ensemble mesurable et $T$-invariant. Montrer que

$$\frac{1}{C}\mu(A)\mu(B) \leq \mu(A \cap B) \leq C\mu(A)\mu(B)$$

pour tout $B \subset [0,1]$ mesurable.
(ix) Montrer que $T$ est ergodique.
(x) Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer que, pour $\lambda$-presque tout $x \in [0,1]$, on a

$$\lim_N \frac{1}{N}\mathrm{Card}\{n : \ 1 \leq n \leq N, a_n(x) = k\} = \frac{1}{\log 2} \log\left(\frac{k+1}{k}\right).$$