Université de Rennes 1
Année 2010/2011

Master 2

Théorie Ergodique et Systèmes Dynamiques–TD1

1 - Montrer que la suite de terme général $x_n = (\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}))^n$ n'est pas équirépartie modulo 1.
[*Indication:* Soient $x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ et $y = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$. Vérifier que $x^n + y^n$ est un entier pour tout $n \geq 0$.]

2 Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres entiers naturels distincts deux à deux et $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$. Pour tout $x \in [0,1]$ et tout entier $n \geq 1$, on pose $S_k(n,x) = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \exp(2\pi i k a_m x)$.
(i) Calculer $\int_0^1 |S_k(n,x)|^2 dx$.
(ii) Montrer que $\int_0^1 \sum_{m=1}^{\infty} |S_k(m^2,x)|^2 dx < \infty$.
(iii) Montrer que, pour presque tout $x \in [0,1]$, on a $\lim_{m\to+\infty} S_k(m^2,x) = 0$.
(iv) Montrer que, pour presque tout $x \in [0,1]$, on a $\lim_{n\to+\infty} S_k(n,x) = 0$.
(v) Montrer que, pour presque tout $x \in [0,1]$, la suite $(a_n x)_{n\geq 1}$ est équirépartie modulo 1.

3 - Soit $T : [0,1] \to [0,1]$ défini par $T(x) = x/2$ pour $0 < x \leq 1$ et $T(0) = 1$. Montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité T-invariante sur la tribu des Boréliens de $[0,1]$.

4 (Système induit) - Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique préservant une mesure de probabilité. Soit $A \in \mathcal{B}$ avec $\mu(A) > 0$. On définit une mesure de probabilité sur A par $\mu_A(B) = \mu(B)/\mu(A)$ pour $B \in \mathcal{A}$, où $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B} \mid B \subset A\}$. Pour $x \in A$, soit $T_A x = T^{n(x)}(x)$, où

$$n(x) = \min\{n \in \mathbf{N} \mid T^n x \in A\}.$$

(i) Montrer que $(A, \mathcal{A}, \mu_A, T_A)$ un système dynamique préservant une mesure de probabilité.
(ii)Supposons que T est ergodique. Montrer que T_A est ergodique.

5 - Soit X un ensemble muni d'une algèbre de Boole $\mathcal{E}$, c-à-d d'un ensemble de parties, contenant X, stable par intersection finie et par passage au complémentaire. Soit $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$ la tribu engendrée par $\mathcal{E}$.
(i) Soient μ et ν deux mesures de probabilité sur $\mathcal{B}$ telles que $\mu(B) = \mu(B)$ pour tout $B \in \mathcal{E}$. Montrer que $\mu = \nu$.
[*Indication:* Théorème des classes monotones.]

(ii) Soit $T : X \to X$ une transformation $\mathcal{B}$-mesurable telle que $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$ pour tout $B \in \mathcal{E}$. Montrer que μ est T-invariante.