Université de Rennes 1 **Année 2015/2016**

Théorie Ergodique des actions de groupes-M2

Examen du 18 mars 2016

Exercice 1. (Vecteurs presqu'invariants-2P.) Soit $(\pi_{\mathbf{R}}, L^2(\mathbf{R}))$ la représentation régulière de $\mathbf{R}$. Construire explicitement une suite (f_n) dans $L^2(\mathbf{R})$ avec $\|f_n\|_2 = 1$ et $\lim_{n\to\infty} \|\pi_{\mathbf{R}}(g)f_n - f_n\|_2 = 0$ uniformément sur chaque partie compacte de $\mathbf{R}$.

Exercice 2. (Suites de Følner-8P.) Soit Γ un groupe dénombrable *moyennable* et soit F une partie finie de Γ.
(i) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $f \in \ell^1(\Gamma)_{1,+}$ (c-à-d $f \geq 0$ et $\|f\|_1 = 1$) tel que

$$\|\pi_\Gamma(\gamma)f - f\|_1 \leq \epsilon \qquad \text{pour tout} \quad \gamma \in F$$

(avec $\pi_\Gamma(\gamma)f(x) = f(\gamma^{-1}x)$).
(ii) Soient f, f' deux fonctions dans $\ell^1(\Gamma)$ avec $f \geq 0, f' \geq 0$. Pour $t > 0$, soit

$$S_t = \{\gamma \in \Gamma \ : \ f(\gamma) > t\} \text{ et } S'_t = \{\gamma \in \Gamma \ : \ f'(\gamma) > t\}.$$

Montrer que

$$\|f - f'\|_1 = \int_0^{+\infty} \mathrm{Card}(S_t \triangle S'_t)dt;$$

en particulier, $\|f\|_1 = \int_0^\infty \mathrm{Card}(S_t)dt$.
[*Indication :* On pourra écrire $\mathrm{Card}(S_t \triangle S'_t)$ comme une somme de fonctions indicatrices d'intervalles évaluées en $t > 0$.]
(iii) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe une partie finie et non vide S de Γ telle que

$$\frac{\mathrm{Card}(\gamma S \triangle S)}{\mathrm{Card}(S)} \leq \epsilon \qquad \text{pour tout} \quad \gamma \in F.$$

(iv) Montrer qu'il existe une suite, dite *suite de Følner*, de parties S_n finies et non vides de Γ telle que

$$\lim_n \frac{\mathrm{Card}(\gamma S_n \triangle S_n)}{\mathrm{Card}(S_n)} = 0 \qquad \text{pour tout} \quad \gamma \in \Gamma.$$

(v) Donner un exemple d'une suite de Følner pour $\Gamma = \mathbf{Z}$.

Exercice 3. (Actions ergodiques co-moyennables et propriété (T)-4P.) Soit G un groupe localement compact possédant *la propriété (T)* et soit $G \curvearrowright (X, m)$ une action avec une mesure m quasi-invariante et σ-finie. On suppose que $G \curvearrowright (X, m)$ est *co-moyennable.*

(i) Montrer qu'il existe une fonction $f \in L^1(X,m)_{1,+}$ telle que

$$\frac{dgm}{dm}(x)f(gx) = f(x) \qquad \text{pour tout} \quad g \in G,\ x \in X.$$

(ii) On suppose, de plus, que $G \curvearrowright (X,m)$ est ergodique. Montrer que m est équivalente à une mesure de probabilité G-invariante sur X.

Exercice 4. (Actions fortement ergodiques et trou spectral-8P.) Soit Γ un groupe dénombrable discret et $\Gamma \curvearrowright (X,m)$ une action mesurable sur un espace de probabilité $(X,\mathcal{B},m)$, avec une mesure Γ-invariante m.

L'action $\Gamma \curvearrowright (X,m)$ est dite *fortement ergodique* si, pour toute suite $A_n \in \mathcal{B}$ telle que

$$\lim_n m(\gamma A_n \triangle A_n) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad \gamma \in \Gamma,$$

on a $\inf_n m(A_n)(1-m(A_n)) = 0$.
(i) On suppose que l'action $\Gamma \curvearrowright (X,m)$ possède un trou spectral. Montrer que $\Gamma \curvearrowright (X,m)$ est fortement ergodique.
(ii) Montrer que, si Γ possède la propriété (T) et si $\Gamma \curvearrowright (X,m)$ est ergoddique, alors $\Gamma \curvearrowright (X,m)$ est fortement ergodique.

Soit Γ_1 le sous groupe de $SL_2(\mathbf{Z})$ engendré par les deux matrices $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On rappelle que Γ_1 est un groupe libre sur $\{a,b\}$.
(iii) Soit $Y = \{0,1\}^{\Gamma_1}$ avec la mesure de probabilité habituelle m. Montrer que l'action de Bernoulli $\Gamma_1 \curvearrowright (Y,m)$ possède un trou spectral et est donc fortement ergodique.

Soit $X := Y \times \mathbf{N}^*$, muni de la mesure de probabilité μ définie par

$$\mu(A) = \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}m\left(\{y \in Y \ : \ (y,n) \in A\}\right), \qquad A \subset X \text{ mesurable.}$$

On admettra qu'il existe $T : X \to X$ mesurable, bijective et préservant μ telle que $T(Y \times \{n\}) \subset Y \times \{n-1\}$ pour tout $n \geq 2$.

Soit $\Gamma = F_3$ le groupe libre sur 3 générateurs a,b,c (avec a,b comme plus haut). On définit une action de Γ sur (X,μ) par

$$a(y,n) := (ay,n),\ b(y,n) := (by,n),\ c(y,n) := T(y,n) \text{ pour } (y,n) \in X.$$

(iv) Montrer que $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ est fortement ergodique mais ne possède pas de trou spectral.