

NOM, prénom:

**Questions de cours 1 (6P.)**

(i) Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\ell_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{N})$  formé des suites  $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  telles que  $x_0 + x_1 = 0$ . Soit  $e_0 = (1, 0, 0, \dots)$ . Calculer la distance  $d(e_0, F)$  de  $e_0$  à  $F$ .

(ii) Pour  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , décrire l'ensemble des formes linéaires continues  $\varphi : \ell_{\mathbf{K}}^2(\mathbf{N}) \rightarrow \mathbf{K}$ .

(iii) Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert séparable. Que dit l'égalité de Parseval?

(iv) Soit  $E$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$  et  $T \in \mathcal{B}(E)$ . On suppose qu'il existe  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^n$  avec  $a_0 \neq 0$  tel que

$$a_0 I_E + a_1 T + \dots + a_n T^n = 0.$$

On suppose que  $T$  est compact. Montrer que  $E$  est de dimension finie.

(v) Énoncer le théorème de Hahn-Banach.

---

**Exercice 2 (8P.)** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite bornée de nombres complexes, tous non nuls. On définit  $S : \ell_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{N}) \rightarrow \ell_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{N})$  par  $S(x_n)_{n \in \mathbf{N}} = (a_n x_{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ .

(i) Calculer  $\|S\|$ .

(ii) Déterminer  $S^*$ .

(iii) Montrer que  $S$  est compact si et seulement si  $\lim_n a_n = 0$ .

*Indication:* on admettra (voir feuille de TD 7) que l'opérateur  $T : (x_n)_n \mapsto (a_n x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est compact si et seulement si  $\lim_n a_n = 0$ .

(iv) Soit  $\lambda \in \mathbf{C}$ . Montrer que  $\text{Ker}(S^* - \lambda I) = \{0\}$ .

(v) On pose  $\alpha = \liminf_n |a_0 a_1 \cdots a_{n-1}|^{1/n}$ . Soit  $\lambda \in \mathbf{C}$ . Montrer que, si  $|\lambda| > \alpha$ , alors  $\text{Ker}(S - \lambda I) = \{0\}$  et que, si  $|\lambda| < \alpha$ , alors  $\text{Ker}(S - \lambda I) \neq \{0\}$ .

(vi) Déterminer les valeurs propres de  $S$  dans le cas où  $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2$ .

---

**Exercice 3 (8P.)** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert séparable; pour tout  $(\xi, \eta) \in \mathcal{H}^2$ , on définit une application linéaire  $T_{\xi, \eta} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  par  $T_{\xi, \eta}(x) = \langle x | \eta \rangle \xi$ , pour tout  $x \in \mathcal{H}$ .

(i) Montrer que  $T_{\xi, \eta}$  est continue et calculer  $\|T_{\xi, \eta}\|$ .

(ii) Soit  $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  et soient deux couples  $(\xi_0, \eta_0)$  et  $(\xi, \eta)$  dans  $\mathcal{H}^2$ . Montrer que  $T_{\xi, \eta_0} S T_{\xi_0, \eta} = \langle S \xi_0 | \eta_0 \rangle T_{\xi, \eta}$ .

(iii) Soit  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  tel que l'image de  $T$  est de dimension 1. Montrer qu'il existe  $\xi, \eta \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$  tels que  $T = T_{\xi, \eta}$ .

(iv) Montrer que  $\text{Vect}\{T_{\xi, \eta} : (\xi, \eta) \in \mathcal{H}^2\}$  coïncide avec l'idéal bilatère  $\mathcal{F}(\mathcal{H})$  de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  formé des opérateurs  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  de rang fini.

Soit  $\mathcal{I}$  un idéal bilatère de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  avec  $\mathcal{I} \neq \{0\}$ .

(v) Montrer que  $T_{\xi, \eta} \in \mathcal{I}$  pour tout  $(\xi, \eta) \in \mathcal{H}^2$ .

(vi) Montrer que  $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{I}$ .

(vii) On suppose que  $\mathcal{I}$  est fermé dans  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Montrer que  $\mathcal{I}$  contient l'idéal  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  formé des opérateurs compacts  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ .