

## Espaces vectoriels normés – Corrigé du CC2 du 28/3/2012

### Questions de cours 1 (7P.)

(i) Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\ell_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{N})$  formé des suites  $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  telles que  $x_0 + x_1 = 0$ . Soit  $e_0 = (1, 0, 0, \dots)$ . Calculer la distance  $d(e_0, F)$  de  $e_0$  à  $F$ .

On a  $d(e_0, F) = \|e_0 - Pe_0\|$ , où  $P$  est la projection orthogonale de  $\ell^2$  sur  $F$ . Comme  $\{(e_0 - e_1)/\sqrt{2}, e_n; n \geq 2\}$  est une base hilbertienne de  $F$ , on a  $Pe_0 = \langle e_0 | (e_0 - e_1)/\sqrt{2} \rangle (e_0 - e_1)/\sqrt{2} = (e_0 - e_1)/2$  et donc  $d(e_0, F) = \|(e_0 + e_1)/2\| = 1/\sqrt{2}$ .

(ii) Soit  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , décrire l'ensemble des formes linéaires continues  $\varphi : \ell_{\mathbf{K}}^2(\mathbf{N}) \rightarrow \mathbf{K}$ .

Par le théorème de Riesz, c'est l'ensemble des formes linéaires  $(y_n)_n \mapsto \sum_n y_n \overline{x_n}$  avec  $(x_n)_n \in \ell_{\mathbf{K}}^2(\mathbf{N})$ .

(iii) Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert séparable. Que dit l'égalité de Parseval?

Pour toute base hilbertienne  $(e_n)_n$  de  $\mathcal{H}$  et tout  $x \in \mathcal{H}$ , on a  $x = \sum_n \langle x | e_n \rangle e_n$  et  $\|x\|^2 = \sum_n |\langle x | e_n \rangle|^2$ .

(iv) Soit  $E$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$  et  $T \in \mathcal{B}(E)$ . On suppose qu'il existe  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^n$  avec  $a_0 \neq 0$  tel que  $a_0 I_E + a_1 T + \dots + a_n T^n = 0$ . On suppose que  $T$  est compact. Montrer que  $E$  est de dimension finie.

Comme  $a_0 \neq 0$ , on a  $I_E = -(a_1 T + \dots + a_n T^n)/a_0$ . L'espace des opérateurs compact étant un idéal de  $\mathcal{B}(E)$ , il s'ensuit que  $I_E$  est compact. Par conséquent,  $E$  est de dimension finie (par le théorème de Riesz).

(v) Énoncer le théorème de Hahn-Banach.

Soient  $E$  un espace vectoriel normé,  $F$  un sous-espace vectoriel et  $\varphi$  une forme linéaire continue sur  $F$ . Alors il existe une forme linéaire continue  $\psi$  sur  $E$  telle que  $\psi|_F = \varphi$  et  $\|\psi\| = \|\varphi\|$ .

**Exercice 2 (8P.)** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite bornée de nombres complexes, tous non nuls. On définit  $S : \ell_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{N}) \rightarrow \ell_{\mathbf{C}}^2(\mathbf{N})$  par  $S(x_n)_{n \in \mathbf{N}} = (a_n x_{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ . (i) Calculer  $\|S\|$ .

Comme  $(a_n)_n$  est bornée,  $C := \sup_n |a_n| < \infty$ . Pour tout  $x = (x_n)_n \in \ell^2$ , on a  $\|Sx\|_2^2 = \sum_n |a_n x_{n+1}|^2 \leq C^2 \sum_n |x_{n+1}|^2 = C\|x\|_2^2$  et donc  $\|S\| \leq C$ . D'autre part, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a  $S(e_{n+1}) = a_n e_n$  et  $\|e_{n+1}\|_2 = 1$ ; d'où  $\|S(e_{n+1})\|_2 = |a_n| \leq \|S\|$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . Il s'ensuit que  $C \leq \|S\|$  et ainsi  $\|S\| = C$ .

(ii) Déterminer  $S^*$ .

Pour tout  $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in \ell^2$ , on a  $\langle Sx | y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_{n+1} \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{a_{n-1} y_{n-1}} = \langle x | S^* y \rangle$  et donc  $S^* y = (0, \overline{a_0} y_0, \overline{a_1} y_1, \overline{a_2} y_2, \dots)$ .

(iii) Montrer que  $S$  est compact si et seulement si  $\lim_n a_n = 0$ .

Soient  $U, V, T \in \mathcal{B}(\ell^2)$  définis par  $U((x_n)_n) = (x_1, x_2, \dots)$ ,  $V((x_n)_n) = (0, x_0, x_1, \dots)$  et  $T((x_n)_n) = (a_0 x_0, a_1 x_1, \dots)$ . Alors  $S = TU$  et  $T = SV$ . Il s'ensuit que  $S$  est compact si et seulement si  $T$  est compact. D'autre part (indication!),  $T$  est compact si et seulement si  $\lim_n a_n = 0$ .

(iv) Soit  $\lambda \in \mathbf{C}$ . Montrer que  $\text{Ker}(S^* - \lambda I) = \{0\}$ .

Soit  $x = (x_n)_n \in \text{Ker}(S^* - \lambda I)$ ; alors  $S^* x = \lambda x$ , c-à-d  $0 = \lambda x_0$  et  $\overline{a_{n-1}} x_{n-1} = \lambda x_n$  pour tout  $n \geq 1$ . Supposons que  $\lambda = 0$ ; alors  $\overline{a_{n-1}} x_{n-1} = 0$  pour tout  $n \geq 1$  et donc  $x = 0$  (car  $a_n \neq 0$  pour tout  $n$ ). Supposons que  $\lambda \neq 0$ ; alors  $x_0 = 0$  et donc  $x_n = 0$  pour tout  $n \geq 1$  (par récurrence sur  $n$ ), c-à-d  $x = 0$ .

(v) On pose  $\alpha = \liminf_n |a_0 a_1 \cdots a_{n-1}|^{1/n}$ . Soit  $\lambda \in \mathbf{C}$ . Montrer que, si  $|\lambda| > \alpha$ , alors  $\text{Ker}(S - \lambda I) = \{0\}$  et que, si  $|\lambda| < \alpha$ , alors  $\text{Ker}(S - \lambda I) \neq \{0\}$ .

Soit  $x = (x_n)_n \in \ell^2$ ; alors  $x \in \text{Ker}(S - \lambda I)$  si et seulement si  $a_n x_{n+1} = \lambda x_n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . Ceci montre que  $x \in \text{Ker}(S - \lambda I)$  si et seulement si  $x_n = \frac{\lambda^n}{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}} x_0$  pour tout  $n \geq 1$  (par récurrence sur  $n$ ). D'autre part, par la règle de Cauchy, la série de terme général  $|\frac{\lambda^n}{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}}|^2 = \frac{|\lambda|^{2n}}{|a_0 a_1 \cdots a_{n-1}|^2}$  converge si  $\limsup_n (\frac{|\lambda|^{2n}}{|a_0 a_1 \cdots a_{n-1}|^2})^{1/n} < 1$  et diverge si  $\limsup_n (\frac{|\lambda|^{2n}}{|a_0 a_1 \cdots a_{n-1}|^2})^{1/n} > 1$ . Or  $\limsup_n (\frac{|\lambda|^{2n}}{|a_0 a_1 \cdots a_{n-1}|^2})^{1/n} = |\lambda|^2 / \alpha^2$ . Supposons que  $|\lambda| < \alpha$ , alors la suite non nulle  $(x_n)_n$  définie par  $x_0 = 1$  et  $x_n = \frac{\lambda^n}{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}}$  est bien dans  $\ell^2$  et donc dans  $\text{Ker}(S - \lambda I)$ . Supposons que  $|\lambda| > \alpha$ . Alors ce qui précède montre que  $x_0 = 0$  et donc  $x = 0$  pour tout  $x \in \text{Ker}(S - \lambda I)$ .

(vi) Déterminer les valeurs propres de  $S$  dans le cas où  $a_n = (\frac{n+2}{n+1})^2$ .

On a  $a_0 a_1 \cdots a_{n-1} = (n+1)^2$  et donc  $\alpha = \liminf_n (n+1)^{2/n} = 1$ . Par (v), tout  $\lambda \in \mathbf{C}$  avec  $|\lambda| < 1$  est valeur propre et aucun  $\lambda \in \mathbf{C}$  avec  $|\lambda| > 1$  n'est valeur propre. Supposons que  $|\lambda| = 1$ . La série de terme général  $|\frac{\lambda^n}{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}}|^2 = \frac{1}{(n+1)^4}$  est convergente. Il s'ensuit (voir preuve de (v)) que  $\text{Ker}(S - \lambda I) \neq \{0\}$ . L'ensemble des valeurs propres de  $S$  est donc  $\{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq 1\}$ .

**Exercice 3 (9P.)** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert séparable; pour tout  $(\xi, \eta) \in \mathcal{H}^2$ , on définit une application

linéaire  $T_{\xi, \eta} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  par  $T_{\xi, \eta}(x) = \langle x | \eta \rangle \xi$ , pour tout  $x \in \mathcal{H}$ . (i) Montrer que  $T_{\xi, \eta}$  est continue et calculer  $\|T_{\xi, \eta}\|$ . Pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , on a, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,  $\|T_{\xi, \eta}(x)\| = |\langle x | \eta \rangle| \|\xi\| \leq \|x\| \|\eta\| \|\xi\|$ ; donc  $T$  est continue et  $\|T\| \leq \|\eta\| \|\xi\|$ . D'autre part,  $\|T_{\xi, \eta}(\eta)\| = \|\eta\|^2 \|\xi\|$ ; d'où  $\|T\| = \|\eta\| \|\xi\|$ .

(ii) Soit  $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  et soient deux couples  $(\xi_0, \eta_0)$  et  $(\xi, \eta)$  dans  $\mathcal{H}^2$ . Montrer que  $T_{\xi, \eta_0} S T_{\xi_0, \eta} = \langle S \xi_0 | \eta_0 \rangle T_{\xi, \eta}$ . Pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , on a  $T_{\xi, \eta_0} S T_{\xi_0, \eta}(x) = T_{\xi, \eta_0} S(\langle x | \eta \rangle \xi_0) = \langle x | \eta \rangle T_{\xi, \eta_0}(S \xi_0) = \langle x | \eta \rangle \langle S \xi_0 | \eta_0 \rangle \xi = \langle S \xi_0 | \eta_0 \rangle T_{\xi, \eta}(x)$ .

(iii) Soit  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  tel que  $T$  est de dimension 1. Montrer qu'il existe  $\xi, \eta \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$  tels que  $T = T_{\xi, \eta}$ . Soit  $\xi \in \mathcal{H}$  avec  $\|\xi\| = 1$  tel que  $\text{Im}(T) = \text{Vect}(\xi)$ . Alors, pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , on a  $T(x) = \langle T(x) | \xi \rangle \xi$ , c-à-d  $T(x) = \langle x | T^* \xi \rangle \xi$ ; ceci montre que  $T = T_{\xi, T^* \xi}$ .

(iv) Montrer que  $\text{Vect}\{T_{\xi, \eta} : (\xi, \eta) \in \mathcal{H}^2\}$  coïncide avec l'idéal bilatère  $\mathcal{F}(\mathcal{H})$  de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  formé des opérateurs  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  de rang fini.

Il est clair que  $\text{Vect}\{T_{\xi, \eta} : (\xi, \eta) \in \mathcal{H}^2\}$  est contenu dans  $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ . Réciproquement, soit  $T \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ . Soit  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  une base orthonormée de  $\text{Im}(T)$ . Alors, pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , on a  $T(x) = \sum_{i=1}^n \langle T(x) | \xi_i \rangle \xi_i = \sum_{i=1}^n \langle x | T^* \xi_i \rangle \xi_i$  et donc  $T = \sum_{i=1}^n T_{\xi_i, T^* \xi_i}$ .

Soit  $\mathcal{I}$  un idéal bilatère de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  avec  $\mathcal{I} \neq \{0\}$ . (v) Montrer que  $T_{\xi, \eta} \in \mathcal{I}$  pour tout  $(\xi, \eta) \in \mathcal{H}^2$ .

Soit  $S \in \mathcal{I}$  avec  $S \neq 0$ . Il existe alors  $\xi_0 \in \mathcal{H}$  tel que  $\eta_0 := S \xi_0 \neq 0$ . Par (ii), on a  $T_{\xi, \eta_0} S T_{\xi_0, \eta} = \langle S \xi_0 | \eta_0 \rangle T_{\xi, \eta} = \|\eta_0\|^2 T_{\xi, \eta}$ . Comme  $\|\eta_0\|^2 \neq 0$  et comme  $\mathcal{I}$  est un idéal bilatère, il s'ensuit que  $T_{\xi, \eta} \in \mathcal{I}$ .

(vi) Montrer que  $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{I}$ .

Ceci découle immédiatement de (v) et (iv).

(vii) On suppose que  $\mathcal{I}$  est fermé dans  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Montrer que  $\mathcal{I}$  contient l'idéal  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  des opérateurs compacts.

Par (vi), on a  $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{I}$ . D'autre part, l'adhérence de  $\mathcal{F}(\mathcal{H})$  coïncide avec  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  (voir cours). Il s'ensuit que  $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{I}$ .