Université de Rennes 1
Année 2010/2011

Licence 3

Espaces vectoriels normés–CC1 du 8/2/2012

NOM, prénom:

Questions de cours 1 (4P.) (i) Soient E un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel fermé de E. Montrer que F est un espace de Banach.

(ii) On définit une application linéaire $\varphi : \ell^\infty(\mathbf{N}) \to \ell^\infty(\mathbf{N})$ par

$$\varphi((x_n)_{n\in\mathbf{N}}) = (x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbf{N}}.$$

Montrer que φ est continue et calculer sa norme $\|\varphi\|$.

(iii) Soit $C_{\mathbf{R}}[0,1]$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, pour $f \in C_{\mathbf{R}}[0,1]$. La boule unité fermée $\overline{B}(0,1)$ dans $C_{\mathbf{R}}[0,1]$ est-elle compacte?

Exercice 2 (6P.) Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. On munit l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ de la norme $M_n(\mathbf{K})$ de la norme $\|(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\| = \max_{1\le i,j\le n} |a_{i,j}|$.
(i) On considère la forme linéaire trace tr : $M_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}, (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \mapsto \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Calculer la norme de tr.
(ii) On fixe $A \in M_n(\mathbf{K})$ et on considère l'application linéaire $R_A : M_n(\mathbf{K}) \to M_n(\mathbf{K}), M \mapsto MA$.

Calculer la norme de R_A.
(iii) Pour $A, B \in M_n(\mathbf{K})$, on pose $\langle A|B\rangle := \mathrm{tr}(AB^*)$. Montrer que $(A, B) \mapsto \langle A|B\rangle$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbf{K})$.

Exercice 3 (14P.) Soit $C_{\mathbf{R}}[0,1]$ l'espace vectoriel des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbf{R}$. On considère les normes $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ sur $C_{\mathbf{R}}[0,1]$. Soit $T : C_{\mathbf{R}}[0,1] \to C_{\mathbf{R}}[0,1]$ l'application linéaire définie par

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt, \qquad \forall f \in C_{\mathbf{R}}[0,1], \forall x \in [0,1].$$

(i) Montrer que $T(f) \in C_{\mathbf{R}}[0,1]$ pour toute $f \in C_{\mathbf{R}}[0,1]$.
(ii) Montrer que $T : (C_{\mathbf{R}}[0,1], \|\cdot\|_1) \to (C_{\mathbf{R}}[0,1], \|\cdot\|_1)$ est continue et que sa norme $\|T\|_{1,1}$ vérifie $\|T\|_{1,1} \leq 1$.
(iii) Montrer que $\|T\|_{1,1} = 1$.
(iv) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in C_{\mathbf{R}}[0,1]$ avec $\|f\|_1 \leq 1$ telle que $\|T\|_{1,1} = \|T(f)\|_1$.
On fixe un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ et on définit une application $F : C_{\mathbf{R}}[0,1] \to C_{\mathbf{R}}[0,1]$ par

$$F(f)(x) = \lambda \int_0^x f(t)dt + \sin x, \qquad \forall f \in C_{\mathbf{R}}[0,1].$$

(v) Soient $f_1, f_2 \in C_{\mathbf{R}}[0,1]$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$|F^n(f_1)(x) - F^n(f_2)(x)| \leq |\lambda|^n \frac{x^n}{n!} \|f_1 - f_2\|_\infty, \qquad \forall x \in [0,1].$$

(vi) En déduire qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ et $0 < k < 1$ tels que

$$\|F^N(f_1) - F^N(f_2)\|_\infty \leq k\|f_1 - f_2\|_\infty, \qquad \forall f_1, f_2 \in C_{\mathbf{R}}[0,1].$$

(vii) Montrer qu'il existe une unique solution $f \in C_{\mathbf{R}}[0,1]$ de l'équation intégrale

$$f(x) = \lambda \int_0^x f(t)dt + \sin x, \qquad \forall x \in [0,1].$$
