

Espaces vectoriels normés L3–Corrigé du CC1 du 8/2/2012

**Questions de cours 1 (4P.)** (i) (i) Soient  $E$  un espace de Banach et  $F$  un sous-espace vectoriel fermé de  $E$ . Montrer que  $F$  est un espace de Banach.

Si  $(x_n)_n$  est une suite de Cauchy dans  $F$ , alors  $(x_n)_n$  est une suite de Cauchy dans  $E$  et est donc convergente vers un élément  $x \in E$ , car  $E$  est complet;  $F$  étant fermé, on a  $x \in F$ .

(ii) On définit une application linéaire  $\varphi : \ell^\infty(\mathbf{N}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbf{N})$  par  $\varphi((x_n)_{n \in \mathbf{N}}) = (x_{n+1} - x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ . Montrer que  $\varphi$  est continue et calculer sa norme  $\|\varphi\|$ .

Pour  $x = (x_n)_n \in \ell^\infty(\mathbf{N})$ , on a  $|x_{n+1} - x_n| \leq |x_{n+1}| + |x_n| \leq 2\|x\|_\infty$  et donc  $|\varphi(x)| \leq 2\|x\|_\infty$ ; ceci montre que  $\varphi$  est continue et que  $\|\varphi\| \leq 2$ . Soit  $x = ((-1)^n)_n$ . Alors  $\|x\|_\infty = 1$  et  $\varphi(x) = ((-2)^{n+1})_n$  et donc  $|\varphi(x)| = 2$ . D'où  $\|\varphi\| = 2$ .

(iii) Soit  $C_{\mathbf{R}}[0, 1]$  l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$  muni de la norme  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ , pour  $f \in C_{\mathbf{R}}[0, 1]$ . La boule unité fermée  $\overline{B}(0, 1)$  dans  $C_{\mathbf{R}}[0, 1]$  est-elle compacte?

L'espace vectoriel  $C_{\mathbf{R}}[0, 1]$  étant de dimension infinie,  $\overline{B}(0, 1)$  n'est pas compact, par le théorème de Riesz.

**Exercice 2 (6P.)** Soit  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$  et  $n \in \mathbf{N}^*$ . On munit l'espace vectoriel des matrices  $n \times n$  à coefficients dans  $\mathbf{K}$  de la norme  $M_n(\mathbf{K})$  de la norme  $\|(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}\| = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i, j}|$ . (i) On considère la forme linéaire trace  $\text{tr} : M_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}, (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \mapsto \sum_{i=1}^n a_{ii}$ . Calculer la norme de  $\text{tr}$ .

Pour  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbf{K})$ , on a  $|\text{tr}(A)| = |\sum_{i=1}^n a_{ii}| \leq \sum_{i=1}^n |a_{ii}| \leq n \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i, j}| = n\|A\|$ . Donc  $\|\text{tr}\| \leq n$ . D'autre part, pour la matrice identité  $I_n$ , on a  $\|I_n\| = 1$  et  $\text{tr}(I_n) = n$ . Par conséquent,  $\|\text{tr}\| = n$ .

(ii) On fixe  $A \in M_n(\mathbf{K})$  et on considère l'application linéaire  $R_A : M_n(\mathbf{K}) \rightarrow M_n(\mathbf{K}), M \mapsto MA$ . Calculer la norme de  $R_A$ .

Pour  $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbf{K})$ , on a  $R_A(M) = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  avec  $b_{ij} = \sum_{k=1}^n m_{ik} a_{kj}$ . Posons  $\alpha = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{kj}|$ . Alors,  $|\sum_{k=1}^n m_{ik} a_{kj}| \leq \sum_{k=1}^n |m_{ik}| |a_{kj}| \leq \alpha \max_{1 \leq i, k \leq n} |m_{i, k}| = \alpha \|M\|$ , pour tous  $1 \leq i, j \leq n$ . Ceci implique que  $\|R_A\| \leq \alpha$ . D'autre part, soit  $j_0$  tel que  $\alpha = \sum_{k=1}^n |a_{kj_0}|$ . On considère  $M = (m_{ik})_{1 \leq i, k \leq n} \in M_n(\mathbf{K})$  avec  $m_{ik} = a_{kj_0}/|a_{kj_0}|$  si  $a_{kj_0} \neq 0$  et  $m_{ik} = 0$  sinon. Alors  $|\sum_{k=1}^n m_{ik} a_{kj_0}| = \sum_{k=1}^n |a_{kj_0}| = \alpha$ . et donc  $\|R_A(M)\| \geq \alpha$ . Comme  $\|M\| \leq 1$ , ceci montre que  $\|R_A\| = \alpha$ .

(iii) Pour  $A, B \in M_n(\mathbf{K})$ , on pose  $\langle A|B \rangle := \text{tr}(AB^*)$ . Montrer que  $(A, B) \mapsto \langle A|B \rangle$  est un produit scalaire sur  $M_n(\mathbf{K})$ .

Soient  $A, B, C \in M_n(\mathbf{K})$  et  $\lambda, \beta \in \mathbf{K}$ . On a, par linéarité de la trace,  $\text{tr}((\lambda A + \beta B)C^*) = \text{tr}(\lambda AC^* + \beta BC^*) = \lambda \text{tr}(AC^*) + \beta \text{tr}(BC^*) = \lambda \langle A|C \rangle + \beta \langle B|C \rangle$

et donc  $\langle \lambda A + \beta B | B \rangle = \lambda \langle A | C \rangle + \beta \langle B | C \rangle$ . On a également  $\text{tr}(AB^*) = \text{tr}((BA^*)^*) = \text{tr}(BA^*)$  et donc  $\langle A | B \rangle = \langle B | A \rangle$ . De plus, si  $A \neq 0$ , on a  $\text{tr}(AA^*) = \sum_{1 \leq i, k \leq n} a_{ik} \bar{a}_{ki} = \sum_{1 \leq i, k \leq n} |a_{ik}|^2 > 0$  et donc  $\langle A | A \rangle > 0$ .

### Exercice 3 (14P.)

Soit  $C_{\mathbf{R}}[0, 1]$  l'espace vectoriel des fonctions continues  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ . On considère les normes  $\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$  et  $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$  sur  $C_{\mathbf{R}}[0, 1]$ . Soit  $T : C_{\mathbf{R}}[0, 1] \rightarrow C_{\mathbf{R}}[0, 1]$  l'application linéaire définie par  $T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$  pour tous  $f \in C_{\mathbf{R}}[0, 1], x \in [0, 1]$ . (i) Montrer que  $T(f) \in C_{\mathbf{R}}[0, 1]$  pour toute  $f \in C_{\mathbf{R}}[0, 1]$ .

Pour tous  $x < y \in [0, 1]$ , on a  $|T(f)(x) - T(f)(y)| \leq \max_{t \in [0, 1]} |f(t)| \int_x^y dt = \|f\|_{\infty}(y - x)$ ; ceci montre que  $T(f)$  est continue sur  $[0, 1]$ .

(ii) Montrer que  $T : (C_{\mathbf{R}}[0, 1], \|\cdot\|_1) \rightarrow (C_{\mathbf{R}}[0, 1], \|\cdot\|_1)$  est continue et que sa norme  $\|T\|_{1,1}$  vérifie  $\|T\|_{1,1} \leq 1$ .

Pour toute  $f \in C_{\mathbf{R}}[0, 1]$  et tout  $x \in [0, 1]$ , on a  $|T(f)(x)| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt = \|f\|_1$  et donc  $\|T(f)\|_1 = \int_0^1 |T(f)(x)| dx \leq \|f\|_1$ ; ainsi  $T$  est continue et  $\|T\|_{1,1} \leq 1$ .

(iii) Montrer que  $\|T\|_{1,1} = 1$ .

Fixons  $n \in \mathbf{N}$ ; soit  $f_n \in C_{\mathbf{R}}[0, 1]$  avec les propriétés suivantes:  $f_n \geq 0$ ,  $\text{supp}(f_n) \subset [0, 1/n]$  et  $\int_0^1 f_n(t) dt = \|f_n\|_1 = 1$ . Alors  $T(f_n)(x) = T(f_n)(1/n) = 1$  pour tout  $x \geq 1/n$  (car  $f_n = 0$  sur  $[1/n, 1]$  et  $\int_0^1 f_n(t) dt = 1$ ). Comme  $f_n \geq 0$ , on a  $T(f_n) \geq 0$  et il s'ensuit que  $\|T(f_n)\|_1 \geq \int_{1/n}^1 T(f_n)(x) dx = \int_{1/n}^1 dx = 1 - 1/n$ . D'autre part, comme  $\|f_n\|_1 = 1$  et  $\|T\|_{1,1} \leq 1$ , on a  $\|T(f_n)\|_1 \leq 1$ . Ceci implique que  $\lim_n \|T(f_n)\|_1 = 1$ . D'où  $\|T\|_{1,1} = 1$ .

(iv) Montrer qu'il n'existe pas de fonction  $f \in C_{\mathbf{R}}[0, 1]$  avec  $\|f\|_1 \leq 1$  telle que  $\|T\|_{1,1} = \|T(f)\|_1$ .

Supposons par l'absurde, qu'il existe  $f \in C_{\mathbf{R}}[0, 1]$  avec  $\|f\|_1 \leq 1$ , tel que  $\|T(f)\|_1 = 1$ . On a (voir (i))  $|T(f)(x)| \leq \|f\|_1 = 1$ , c-à-d  $1 - |T(f)(x)| \geq 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . D'autre part,  $\int_0^1 (1 - |T(f)(x)|) dx = 1 - \|T(f)\|_1 = 0$ . D'où  $T(f) = 1$  sur  $[0, 1]$ , par continuité de  $T(f)$ . Ceci est absurde car  $T(f)(0) = 0$ .

On fixe un scalaire  $\lambda \in \mathbf{K}$  et on définit une application  $F : C_{\mathbf{R}}[0, 1] \rightarrow C_{\mathbf{R}}[0, 1]$  par  $F(f)(x) = \lambda \int_0^x f(t) dt + \sin x$  pour tout  $f \in C_{\mathbf{R}}[0, 1]$ . (v) Soient  $f_1, f_2 \in C_{\mathbf{R}}[0, 1]$ . Montrer que, pour tout  $n \geq 1$ , on a  $|F^n(f_1)(x) - F^n(f_2)(x)| \leq |\lambda|^n \frac{x^n}{n!} \|f_1 - f_2\|_{\infty}$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .

On procède par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$ , on a  $|F(f_1)(x) - F(f_2)(x)| \leq |\lambda| \int_0^x |f_1(t) - f_2(t)| dt \leq |\lambda|x \|f_1 - f_2\|_{\infty}$ . Supposons l'assertion vraie pour  $n \geq 1$ . Alors  $|F^{n+1}(f_1)(x) - F^{n+1}(f_2)(x)| = |F(F^n(f_1))(x) - F(F^n(f_2))(x)| \leq |\lambda| \int_0^x |F^n(f_1)(t) - F^n(f_2)(t)| dt$  et donc, par hypothèse de récurrence,  $|F^{n+1}(f_1)(x) - F^{n+1}(f_2)(x)| \leq |\lambda|^n \|f_1 - f_2\|_{\infty} |\lambda| \int_0^x \frac{t^n}{n!} dt = |\lambda|^{n+1} \|f_1 - f_2\|_{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1!}$ .

(vi) En déduire qu'il existe  $N \in \mathbf{N}$  et  $0 < k < 1$  tels que  $\|F^N(f_1) - F^N(f_2)\|_{\infty} \leq k \|f_1 - f_2\|_{\infty}$  pour tous  $f_1, f_2 \in C_{\mathbf{R}}[0, 1]$ .

On prend  $k = 1/2$ ; comme  $\lim_n \frac{|\lambda|^n}{n!} = 0$ , il existe  $N$  tel que  $\frac{|\lambda|^N}{N!} \leq k$ . On a alors, avec (v),  $|F^N(f_1)(x) - F^N(f_2)(x)| \leq kx^N \|f_1 - f_2\|_\infty \leq k \|f_1 - f_2\|_\infty$  pour tous  $f_1, f_2 \in C_{\mathbf{R}}[0, 1]$ ,  $x \in [0, 1]$ .

(vii) Montrer qu'il existe une unique solution  $f \in C_{\mathbf{R}}[0, 1]$  de l'équation intégrale  $f(x) = \lambda \int_0^x f(t) dt + \sin x$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .

L'équation s'écrivant  $F(f) = f$ , il s'agit de montrer que  $F$  possède un unique point fixe dans  $C_{\mathbf{R}}[0, 1]$ . Comme  $F^N$  est une contraction,  $F^N$  possède un unique point fixe  $f$  dans  $C_{\mathbf{R}}[0, 1]$ . On a alors  $F^N(F(f)) = F(F^N(f)) = F(f)$  et  $F(f)$  est également un point fixe de  $F^N$ . Par unicité, on a ainsi  $F(f) = F$ .