

Espaces vectoriels normés

Bachir Bekka, Cours L3 Rennes 2009/2010

8 avril 2010

Table des matières

1	Introduction	1
2	Espaces vectoriels normés	3
2.1	Rappels sur les espaces métriques	3
2.2	Espaces vectoriels normés	7
2.3	Applications linéaires continues	9
2.4	Espaces vectoriels normés de dimension finie	12
2.5	Complété d'un espace vectoriel normé	14
2.6	Quotient d'un espace vectoriel normé	17
2.7	Une classe d'exemples : les espaces L^p	20
2.8	Exercices	22
3	Espaces de Hilbert	29
3.1	Généralités sur les espaces de Hilbert	29
3.2	Le théorème de la projection	34
3.3	Dual d'un espace de Hilbert : le théorème de Riesz	37
3.4	Bases hilbertiennes	38
3.5	Inégalité de Bessel, égalité de Parseval	41
3.6	Réflexivité des espaces de Hilbert	45
3.7	Opérateurs sur les espaces de Hilbert	47
3.8	Opérateurs compacts	54
3.9	Exercices	61
4	Théorèmes classiques	71
4.1	Hahn-Banach	71
4.2	Baire	75
4.3	Application ouverte	76
4.4	Banach-Steinhaus	78

4.5 Exercices 79

Chapitre 1

Introduction

Ce cours est une introduction à l'étude des espaces vectoriels normés et des applications linéaires continues entre de tels espaces. Les espaces qui interviendront seront en général des espaces vectoriels de dimension infinie, comme par exemple $C[0, 1]$ ou $L^2(\mathbf{R})$, l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ ou celui des (classes d'équivalence de) fonctions mesurables et de carré intégrable sur \mathbf{R} .

Introduisant un point de vue géométrique, on considèrera un tel espace E comme un ensemble de points ("vecteurs ") et l'on étudiera les fonctions sur E ou bien les applications de E vers un autre espace F . Mais avant tout, on munira E d'une norme $\| \cdot \|$; pour un vecteur x de E , le nombre $\|x\|$ peut ainsi être vu comme la "longueur" de x .

Dans de nombreux problèmes (voir plus bas), on cherche à résoudre des équations linéaires dont les inconnues sont des éléments de tels espaces, de sorte qu'on peut considérer l'étude des espaces vectoriels normés comme une extension de l'algèbre linéaire aux espaces de dimension infinie.

De nombreux problèmes en physique, comme par exemple l'équation de corde vibrante pour $u = u(s, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \\ u(a, t) &= u(b, t) = 0, \end{aligned}$$

se ramènent, après "séparation des variables" $u(s, t) = x(s)y(t)$, à un problème

de *Sturm-Liouville* du type suivant :

$$\begin{aligned}x(s)'' + q(s)x(s) - \lambda x(s) &= 0 \\R_1x &:= \alpha_1x(a) + \beta_1x'(a) = 0 \\R_2x &:= \alpha_2x(b) + \beta_2x'(b) = 0,\end{aligned}\quad (S - L)$$

où $q \in C[a, b]$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sont des nombres réels et où λ est un paramètre réel à déterminer. Soit x_1, x_2 un système fondamental de l'équation différentielle $x(s)'' + q(s)x(s) = 0$ et supposons que $\det \begin{pmatrix} R_1x_1 & R_2x_1 \\ R_1x_2 & R_2x_2 \end{pmatrix} \neq 0$. Alors, il existe une fonction continue G ("fonction de Green") sur le carré $[a, b] \times [a, b]$ telle que, pour tout $h \in C[a, b]$, l'unique solution x du problème

$$\begin{aligned}x(s)'' + q(s)x(s) &= h(s) \\R_1x &= 0 \\R_2x &= 0,\end{aligned}$$

s'écrive sous la forme

$$x(s) = \int_a^b G(s, t)h(t)dt.$$

Il s'ensuit que toute solution x du problème de Sturm-Liouville $(S - L)$ satisfait à l'équation ("équation intégrale") suivante :

$$x(s) - \lambda \int_a^b G(s, t)x(t)dt = 0. \quad (*)$$

Définissons une application linéaire $K : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ (ou $K : L^2[a, b] \rightarrow L^2[a, b]$) par

$$Kx(s) = \int_a^b G(s, t)x(t)dt.$$

L'équation intégrale (*) s'écrit alors

$$(I - \lambda K)x = 0$$

ou encore, pour $\lambda \neq 0$

$$(K - \lambda^{-1}I)x = 0$$

On est ainsi amené à étudier les valeurs propres et les fonctions propres de l'application linéaire K .

Chapitre 2

Espaces vectoriels normés

2.1 Rappels sur les espaces métriques

Soit (X, d) un espace métrique.

Pour $x \in X$ et $r > 0$, on note

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

la *boule ouverte* de centre x et de rayon r ; la *boule fermée* de centre x et de rayon r est notée

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}.$$

Une partie U de X est dite *ouverte* si U est réunion de boules ouvertes. Une partie F de X est dite *fermée* si son complémentaire $X \setminus F$ est ouvert.

Une suite $(x_n)_n$ de points de X converge vers $x \in X$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $x_n \in B(x, \varepsilon)$ pour tout $n \geq N$. On écrit alors $\lim_n x_n = x$. Ceci équivaut au fait que $\lim_n d(x_n, x) = 0$.

Une suite $(x_n)_n$ de points de X est une *suite de Cauchy* si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ pour tous $n, m \geq N$. On se rappellera que toute suite convergente est de Cauchy.

L'espace métrique (X, d) est *complet* si toute suite de Cauchy dans X converge vers un élément de X .

Toute partie A de X , munie de la distance induite d_A , est un espace métrique. L'*adhérence* \overline{A} de A est l'intersection de tous les fermés contenant A ; c'est également l'ensemble des $x \in X$ tels que, pour tout ouvert U avec $x \in U$, on a $A \cap U \neq \emptyset$; ou bien encore : \overline{A} est l'ensemble des points $x \in X$

pour lesquels il existe une suite $(a_n)_n$ dans A telle que $\lim_n a_n = x$. Bien sur, A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.

Proposition 2.1.1 *Soit (X, d) un espace métrique complet et A une partie de X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *L'espace métrique (A, d_A) est complet ;*
- (ii) *A est fermée dans X .*

Exemple 2.1.2 Soit \mathbf{K} l'ensemble \mathbf{R} ou \mathbf{C} .

- (i) Muni de la distance canonique $d(x, y) = |x - y|$, l'espace \mathbf{K} est complet.
- (ii) Soit T un ensemble quelconque et (X, d) un espace métrique complet. Soit $\ell^\infty(T, X)$ l'ensemble des applications bornées $x : T \rightarrow X$. Muni de la distance

$$d_\infty(x, y) = \sup_{t \in T} d(x(t), y(t)) \quad \text{pour tous } x, y \in \ell^\infty(T, X),$$

l'espace $\ell^\infty(T, X)$ est complet (voir Exercice 2.8.1).

- (iii) Pour $a < b$, soit $C[a, b]$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbf{K} . Muni de la distance

$$d_\infty(x, y) = \sup_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)| \quad \text{pour tout } x, y \in C[a, b],$$

l'espace $C[a, b]$ est complet (voir Exercice 2.8.2).

L'espace métrique (X, d) est *compact* si de tout recouvrement $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ par des ouverts U_i , on peut extraire un sous-recouvrement fini, c-à-d il existe une partie finie $J \subset I$ telle que $X = \bigcup_{i \in J} U_i$.

L'espace métrique (X, d) est *précompact* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J \subset X$ telle que $X = \bigcup_{x \in J} B(x, \varepsilon)$.

Théorème 2.1.3 *Soit (X, d) un espace métrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *X est compact ;*
- (ii) *toute suite de points de X possède une sous-suite convergente ;*
- (iii) *X est précompact et complet.*

Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) des espaces métriques et $f : X_1 \rightarrow X_2$ une application.

On dit que $f : X_1 \rightarrow X_2$ est *continue* en $x_0 \in X_1$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tel que $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ pour tout $x \in X_1$ avec $d(x, x_0) < \delta$. Ceci équivaut à la condition suivante : la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$ pour toute suite $(x_n)_n$ dans X_1 avec $\lim_n x_n = x$.

L'application $f : X_1 \rightarrow X_2$ est dite *continue* si elle est continue en tout point de X_1 . Ceci équivaut à la condition suivante : $f^{-1}(V)$ est ouvert dans X_1 pour tout ouvert V de X_2 .

On dit que $f : X_1 \rightarrow X_2$ est *uniformément continue* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pour tous $x, y \in X_1$ avec $d(x, y) < \delta$.

Une partie D de X est *dense* dans X si $\overline{D} = X$, c-à-d si $D \cap U \neq \emptyset$ pour tout ouvert non vide $U \subset X$. Ceci équivaut à la propriété suivante : pour tout $x \in X$, il existe une suite $(x_n)_n$ formée d'éléments de D telle que $\lim_n x_n = x$.

Théorème 2.1.4 (*Prolongement des applications uniformément continues*) Soient $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ des espaces métriques, D une partie dense de X_1 et $f : D \rightarrow X_2$ une application uniformément continue. Supposons que (X_2, d_2) est complet. Il existe alors une unique application uniformément continue $\tilde{f} : X_1 \rightarrow X_2$ qui prolonge f

Démonstration Soit $x \in X_1$. Comme D est dense, il existe une suite $(x_n)_n$ dans D telle que $\lim_n x_n = x$. La suite $(x_n)_n$ est de Cauchy. Comme f est uniformément continue, la suite $(f(x_n))_n$ est de Cauchy. Comme X_2 est complet, $\lim_n f(x_n)$ existe dans X_2 . On pose $\tilde{f}(x) := \lim_n f(x_n)$.

Cette définition ne dépend pas de la suite $(x_n)_n$ convergeant vers x . En effet, soit $(y_n)_n$ une autre suite dans D telle que $\lim_n y_n = x$. Soit $(z_n)_n$ la suite de D définie par $z_{2k} = x_k$ et $z_{2k+1} = y_k$. Alors $\lim_n z_n = x$. De même que plus haut, $(f(z_n))_n$ converge dans X_2 . Il s'ensuit que

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n f(z_n) = \lim_n f(y_n).$$

On a ainsi défini une application $\tilde{f} : X_1 \rightarrow X_2$. Il est clair que \tilde{f} coïncide avec f sur D .

Montrons que \tilde{f} est uniformément continue : Soit $\varepsilon > 0$. Par uniforme continuité de f , il existe $\delta > 0$ tel que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$ pour tous $x, y \in D$ avec $d(x, y) < \delta$.

Soient $x, y \in X_1$ avec $d(x, y) < \delta/2$. Soient x_n, y_n des suites dans D avec $\lim_n x_n = x$ et $\lim_n y_n = y$. Alors, comme $\lim_n d(x_n, y_n) = d(x, y)$, il existe N tel que $d(x_n, y_n) < \delta$ pour tout $n \geq N$. On a donc $d(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon/2$ pour tout $n \geq N$. Il en résulte que $d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) < \varepsilon$. ■

Définition 2.1.5 Soient $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ des espaces métriques. On dit qu'une application $f : X_1 \rightarrow X_2$ est *isométrique* ou bien une *isométrie* si $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ pour tous $x, y \in X_1$.

On observera qu'une isométrie est injective; par contre, une isométrie n'est pas nécessairement surjective.

Le théorème suivant, dont l'importance ne peut pas être exagérée, est souvent utilisé pour se ramener aux espaces métriques complets.

Théorème 2.1.6 (Complétion d'un espace métrique) Soit (X, d) un espace métrique. Il existe un espace métrique complet $(\widehat{X}, \widehat{d})$ et une application isométrique $\widehat{f} : X \rightarrow \widehat{X}$ d'image dense. L'espace $(\widehat{X}, \widehat{d})$ est unique au sens suivant : soit $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ un espace métrique complet et $\widetilde{f} : X \rightarrow \widetilde{X}$ une application isométrique d'image dense. Alors il existe une application bijective et isométrique $h : \widehat{X} \rightarrow \widetilde{X}$ avec $\widetilde{f} = h \circ \widehat{f}$.

Démonstration

• **Existence** Soit $\ell^\infty(X)$ l'ensemble des applications bornées $x : X \rightarrow \mathbf{R}$. Muni de la distance $d_\infty(x, y) = \sup_{t \in X} |x(t) - y(t)|$, l'espace $\ell^\infty(X)$ est complet (voir Exemple 2.1.2).

On fixe un point base $x_0 \in X$ et on définit $\widehat{f} : X \rightarrow \ell^\infty(X)$ par

$$\widehat{f}(x)(t) = d(x, t) - d(t, x_0) \quad \text{pour tous } x, t \in X.$$

On a bien $\widehat{f}(x) \in \ell^\infty(X)$ pour tout $x \in X$ car, par l'inégalité triangulaire,

$$|\widehat{f}(x)(t)| = |d(x, t) - d(t, x_0)| \leq d(x, x_0) \quad \text{pour tout } t \in X.$$

De plus, pour $x, y \in X$, on a

$$d_\infty(\widehat{f}(x), \widehat{f}(y)) = \sup_{t \in X} |d(x, t) - d(y, t)| \leq d(x, y).$$

D'autre part, en prenant $t = y$, on voit que $\sup_{t \in X} |d(x, t) - d(y, t)| \geq d(x, y)$.

On a ainsi

$$d_\infty(\widehat{f}(x), \widehat{f}(y)) = d(x, y).$$

Donc \widehat{f} est isométrique.

Soit \widehat{X} l'adhérence de $\widehat{f}(X)$ dans $\ell^\infty(X)$. Alors \widehat{X} est complet et $\widehat{f} : X \rightarrow \widehat{X}$ est isométrique et d'image dense.

• **Unicité** Soit $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ un autre espace métrique complet et $\widetilde{f} : X \rightarrow \widetilde{X}$ une application isométrique d'image dense. L'application

$$g := \widetilde{f} \circ \widehat{f}^{-1} : \widehat{f}(X) \rightarrow \widetilde{X}$$

est isométrique. Par le Théorème 2.1.4, g s'étend en une application $h : \widehat{X} \rightarrow \widetilde{X}$. Il est clair que h est isométrique; il s'ensuit que $h(\widehat{X}) = \widetilde{f}(X)$ est complet et donc fermé dans \widetilde{X} . Comme $\widetilde{f}(X)$ est dense, on a donc $h(\widehat{X}) = \widetilde{X}$. Par conséquent, h est une bijection isométrique. Par définition de g , on a

$$h \circ \widehat{f} = g \circ \widehat{f} = \widetilde{f} \circ \widehat{f}^{-1} \circ \widehat{f} = \widetilde{f}. \blacksquare$$

Le théorème du point fixe suivant possède d'innombrables applications. Une application $f : X \rightarrow X$ d'un espace métrique (X, d) dans lui-même est dite *contractante* si f est Lipschitzienne de rapport $k < 1$, c-à-d s'il existe $k < 1$ tel que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ pour tous $x, y \in X$. Un point $x \in X$ est un *point fixe* de f si $f(x) = x$.

Théorème 2.1.7 (Théorème du point fixe) Soit (X, d) un espace métrique complet non vide. Soit $f : X \rightarrow X$ une application contractante. Alors f possède un unique point fixe. Plus précisément : soit $x_0 \in X$ et soit $(x_n)_n$ la suite définie dans X par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \geq 0$. Alors $(x_n)_n$ converge vers l'unique point l de f et on a la majoration suivante

$$d(x_n, l) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

2.2 Espaces vectoriels normés : généralités

Dans toute la suite, sauf mention du contraire, \mathbf{K} désignera le corps \mathbf{R} ou le corps \mathbf{C} , muni de la valeur absolue habituelle.

Définition 2.2.1 (Espace vectoriel normé) Soit E un espace vectoriel sur \mathbf{K} . Une *norme* sur E est une application

$$E \rightarrow [0, +\infty[, \quad x \mapsto \|x\|$$

avec les propriétés suivantes

- (N1) pour tout $x \in E$ non nul, on a $\|x\| \neq 0$;
- (N2) pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on a $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- (N3) pour tous $x, y \in E$, on a $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (“inégalité triangulaire”).

Le couple $(E, \|\cdot\|)$ est un *espace vectoriel normé*. Une application $x \mapsto \|x\|$ vérifiant (N2) et (N3) mais non nécessairement (N1) est dite *semi-norme* sur E .

La preuve de la proposition suivante est immédiate.

Proposition-Definition 2.2.2 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. L'application $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ est une distance sur E , appelée la distance canonique associée à la norme $\|\cdot\|$.

Définition 2.2.3 (Espaces de Banach) Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est appelé *espace de Banach* si E , muni de la distance canonique associée à $\|\cdot\|$, est un espace métrique complet.

Définition 2.2.4 (Normes équivalentes) Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un espace vectoriel E sont *équivalentes* s'il existe des constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Il est clair que, dans ce cas, $(E, \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach si et seulement si $(E, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Banach.

Exemple 2.2.5 (i) Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$, on pose

- $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$
- $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$
- $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$.

Les applications $x \mapsto \|x\|_\infty$, $x \mapsto \|x\|_1$ et $x \mapsto \|x\|_2$ sont des normes équivalentes sur \mathbf{K}^n (voir Exercice 2.8.5).

On notera $\ell^\infty(n)$, $\ell^1(n)$ et $\ell^2(n)$ l'espace \mathbf{K}^n muni de la norme correspondante. Les espaces $\ell^\infty(n)$, $\ell^1(n)$ et $\ell^2(n)$ sont des espaces de Banach.

(ii) Soit T un ensemble quelconque. Soit $\ell^\infty(T)$ l'ensemble des applications bornées $x : T \rightarrow \mathbf{K}$. Alors $\ell^\infty(T)$ est un \mathbf{K} -espace vectoriel (pour les opérations évidentes). L'application

$$x \mapsto \sup_{t \in T} |x(t)| \quad \text{pour tout } x \in \ell^\infty(T)$$

est un norme sur $\ell^\infty(T)$. L'espace $\ell^\infty(T, X)$ est un espace de Banach (voir Exercice 2.8.1)

(iii) Soit K un espace métrique compact et soit $C(K)$ l'espace vectoriel des fonctions continues $x : K \rightarrow \mathbf{K}$. L'application

$$x \mapsto \|x\|_\infty := \sup_{t \in K} |x(t)| \quad \text{pour tout } x \in C(K)$$

est une norme sur $C(K)$ L'espace $C(K)$ est un espace de Banach (voir Exercice 2.8.7).

(iv) L'espace vectoriel $C^\infty[0, 1]$ des fonctions infiniment dérivables $x : [0, 1] \rightarrow \mathbf{K}$, muni de la norme $x \mapsto \|x\|_\infty$ n'est pas complet.

(v) L'espace vectoriel $C^1[0, 1]$ des fonctions continument dérivables $x : [0, 1] \rightarrow \mathbf{K}$, muni de la norme $x \mapsto \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$ est un espace de Banach (voir Exercice 2.8.9).

2.3 Applications linéaires continues

Soient $(E_1, \|\cdot\|_1)$ et $(E_2, \|\cdot\|_2)$ deux espaces vectoriels normés et $T : E_1 \rightarrow E_2$ une application linéaire.

Théorème 2.3.1 *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) T est continue ;
- (ii) T est continue en 0 ;
- (iii) il existe une constante C telle que $\|Tx\|_2 \leq C\|x\|_1$ pour tout $x \in E_1$.

Démonstration L'implication (i) \implies (ii) est évidente.

Montrons l'implication (ii) \implies (iii). Par continuité de T en 0, il existe $\delta > 0$ tel que $T(B(0, \delta)) \subset B(0, 1)$. Soit $x \in E_1, x \neq 0$. Posons $x' = \frac{\delta}{2\|x\|_1}x$. Alors $x' \in B(0, \delta)$ et par conséquent $Tx' \in B(0, 1)$. Ceci signifie que

$$\|Tx\|_2 \leq \frac{2}{\delta}\|x\|_1.$$

Cette inégalité étant également vraie pour $x = 0$, (ii) est vérifié avec $C = 2/\delta$.

Supposons que (ii) est vérifié. Alors, pour tous $x, y \in E_1$, on a

$$\|T(x - y)\|_2 \leq C\|x - y\|_1,$$

c-à- d $\|Tx - Ty\|_2 \leq C\|x - y\|_1$. Donc T est lipschitzienne et par conséquent continue. Ceci montre que (iii) \implies (i) ■

Définition 2.3.2 (Norme d'une application linéaire continue) Soit $T : E_1 \rightarrow E_2$ une application linéaire continue entre les espaces vectoriels normés $(E_1, \|\cdot\|_1)$ et $(E_2, \|\cdot\|_2)$. Le nombre

$$\sup_{x \in E_1, x \neq 0} \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1}$$

- qui par le Théorème 2.3.1 est fini - est appelé la *norme* de T et est noté $\|T\|$.

Une application linéaire $T : E_1 \rightarrow E_2$ entre espaces vectoriels qui est continue est souvent dite *bornée*.

Remarque 2.3.3 (i) Si, pour une constante C , on a $\|Tx\|_2 \leq C\|x\|_1$ pour tout $x \in E_1$, alors - trivialement - T est bornée et $\|T\| \leq C$. De plus,

$$\|Tx\|_2 \leq \|T\|\|x\|_1 \quad \text{pour tout } x \in E_1.$$

(ii) On vérifie facilement que

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_1=1} \|Tx\|_2$$

ainsi que

$$\|T\| = \inf\{C : \|Tx\|_2 \leq C\|x\|_1 \text{ pour tout } x \in E_1\}.$$

Notation On note $\mathcal{B}(E_1, E_2)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues entre E_1 et E_2 . Quand $E_1 = E_2 = E$, $\mathcal{B}(E_1, E_2)$ est simplement noté $\mathcal{B}(E)$.

Proposition 2.3.4 Soient $(E_1, \|\cdot\|_1)$ et $(E_2, \|\cdot\|_2)$ deux espaces vectoriels normés. L'application $T \mapsto \|T\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}(E_1, E_2)$.

Démonstration (N1) Soit $T \in \mathcal{B}(E_1, E_2)$ avec $\|T\| = 0$. Alors, par définition de T , on a $Tx = 0$ pour tout $x \in E_1$ et donc $T = 0$.

(N2) Soient $T \in \mathcal{B}(E_1, E_2)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. On a

$$\begin{aligned} \|\lambda T\| &= \sup_{\|x\|_1=1} \|(\lambda T)x\|_2 \\ &= \sup_{\|x\|_1=1} |\lambda| \|Tx\|_2 = |\lambda| \sup_{\|x\|_1=1} \|Tx\|_2 \\ &= |\lambda| \|T\|. \end{aligned}$$

(N3) Soient $T, S \in \mathcal{B}(E_1, E_2)$. Pour tout $x \in E_1$, on a

$$\begin{aligned} \|(T + S)x\|_2 &= \|Tx + Sx\|_2 \leq \|Tx\|_2 + \|Sx\|_2 \\ &\leq \|T\|\|x\|_1 + \|S\|\|x\|_1 = (\|T\| + \|S\|)\|x\|_1 \end{aligned}$$

et donc $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$. ■

Proposition 2.3.5 Soient E, F et G des espaces vectoriels normés et soient $T : E \rightarrow F$ et $S : F \rightarrow G$ des applications linéaires continues. Alors

$$\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|.$$

Démonstration Pour tous $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} \|S \circ T(x)\| &= \|S(Tx)\| \leq \|S\|\|Tx\| \\ &\leq \|S\|\|T\|\|x\|. \end{aligned}$$

D'où $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|$. ■

Théorème 2.3.6 Soient E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach. Alors l'espace vectoriel normé $\mathcal{B}(E, F)$ est un espace de Banach.

Démonstration Soient $(T_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}(E, F)$. Soit $x \in E$. Comme

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| \quad \text{pour tous } m, n \in \mathbf{N},$$

la suite $(T_n x)_n$ est une suite de Cauchy dans F . Comme F est complet, la limite $Tx := \lim_n T_n x$ existe dans F .

Pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on a

$$T_n(x + y) = T_n x + T_n y \quad \text{et} \quad T_n(\lambda x) = \lambda T_n x$$

et donc, par passage à la limite,

$$T(x + y) = Tx + Ty \quad \text{et} \quad T(\lambda x) = \lambda Tx;$$

ceci montre que T est linéaire. Soit $\varepsilon > 0$; comme $(T_n x)_n$ est une suite de Cauchy, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| \leq \varepsilon\|x\| \quad \text{pour tous } n, m \geq N, x \in E.$$

En faisant $m \rightarrow \infty$, on obtient

$$(*) \quad \|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon \|x\| \quad \text{pour tout } n \geq N, x \in E.$$

En particulier, on a

$$\|Tx\| \leq \|T_N x - Tx\| + \|T_N x\| \leq (\varepsilon + \|T_N\|)\|x\| \quad \text{pour tout } x \in E,$$

ce qui montre que T est continue. D'autre part, $(*)$ montre que

$$\|T_n - T\| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N. \blacksquare$$

Définition 2.3.7 (Dual d'un espace vectoriel normé) Soit E un espace vectoriel normé. L'espace vectoriel $\mathcal{B}(E, \mathbf{K})$ est appelé *espace dual (topologique)* de E et est noté E' .

Corollaire 2.3.8 Soit E un espace vectoriel normé. Le dual E' d'un espace vectoriel normé E est un espace de Banach.

Démonstration Comme \mathbf{K} est complet, ceci découle du Théorème 2.3.6. \blacksquare

2.4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Pour $n \geq 1$, soient E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension n et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E .

Considérons sur E la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$.

Proposition 2.4.1 (i) Soient F un espace vectoriel normé et $T : \mathbf{K}^n \rightarrow F$ une application linéaire. Alors T est continue
(ii) Toutes les normes sur E sont équivalentes.
(iii) E est complet pour toute norme $\|\cdot\|$.
(iv) Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E ; alors toute boule fermée $\overline{B}(x, r)$ de E est compacte.

Démonstration (i) Pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbf{K}^n$, on a $Tx = \sum_{i=1}^n x_i T e_i$ et donc

$$\|Tx\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|T e_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|T e_i\| \|x\|_\infty.$$

Ceci montre que T est continue et que $\|T\| \leq \sum_{i=1}^n \|Te_i\|$.

(ii) Il suffit de montrer que toute norme $\|\cdot\|$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbf{K}^n$, on a

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq C \|x\|_\infty.$$

pour $C = \sum_{i=1}^n \|e_i\|$. Soit

$$S = \{x \in E : \|x\|_\infty = 1\}.$$

Toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de S contient une sous-suite convergente; ainsi $S(0, 1)$ est compacte.

Considérons l'application

$$f : S \rightarrow [0, +\infty[, x \mapsto \|x\|.$$

Alors f est continue sur le compact S et $f(x) > 0$ pour tout $x \in S$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) \geq \varepsilon$, c-à-d $\|x\| \geq \varepsilon$, pour tout $x \in S$.

Soit $x \in E$ avec $x \neq 0$. Alors, comme $\frac{1}{\|x\|_\infty} x \in S$, on a

$$\frac{1}{\|x\|_\infty} \|x\| \geq \varepsilon,$$

c-à-d $\|x\|_\infty \leq \frac{1}{\varepsilon} \|x\|$.

(iii) Il est clair que E , muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est complet. Par (ii), E , muni de n'importe quelle norme, est complet.

(iv) Toute boule fermée dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte. Par (ii), il s'ensuit que, pour n'importe quelle norme $\|\cdot\|$, toute boule fermée dans $(E, \|\cdot\|)$ est compacte. ■

Corollaire 2.4.2 *Soit E un espace vectoriel normé quelconque. Tout sous-espace de dimension finie de E est fermé.*

Démonstration Ceci découle de (iii) de la Proposition 2.4.1 et de la Proposition 2.1.1. ■

Le (iv) de la Proposition 2.4.1 montre que les boules fermées dans un espace vectoriel normé de dimension finie sont compactes. Nous allons voir que ceci n'est plus vrai en dimension infinie.

Lemme 2.4.3 (Lemme de Riesz) Soit E un espace vectoriel normé quelconque et F un sous-espace vectoriel fermé et propre de E . Fixons $0 < \delta < 1$. Alors il existe $x \in E$ avec $\|x_0\| = 1$ tel que $d(x_0, F) \geq \delta$, où $d(x_0, F) = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in F\}$.

Démonstration Comme $F \neq E$, il existe $y \in E \setminus F$. Comme F est fermé, on a $d := d(y, F) > 0$. Comme $0 < \delta < 1$, on a $d/\delta > d$; il existe donc $z \in F$ tel que $\|y - z\| \leq d/\delta$. Posons $a = \frac{1}{\|y-z\|}$ et

$$x_0 = a(y - z)$$

Alors $\|x_0\| = 1$. Soit $x \in F$. Comme $\frac{1}{a}x + z \in F$ et comme $a \geq \delta/d$, on a

$$\begin{aligned} \|x - x_0\| &= \|x - a(y - z)\| = \|(x + az) - ay\| \\ &= a \left\| \left(\frac{1}{a}x + z \right) - y \right\| \geq ad \geq \delta \blacksquare \end{aligned}$$

Théorème 2.4.4 Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. Alors aucune boule fermée $\overline{B}(x, r)$ pour $x \in E$ et $r > 0$ n'est compacte.

Démonstration L'application $\overline{B}(x, r) \rightarrow \overline{B}(0, 1)$ $y \mapsto (y - x_0)/r$ étant un homéomorphisme, il suffit de montrer que $\overline{B}(0, 1)$ n'est pas compacte.

Fixons $x_0 \in E$ avec $\|x_0\| = 1$. Soit F_0 la droite vectorielle engendrée par x_0 . Par le Corollaire 2.4.2, F_0 est fermée. Comme E est de dimension infinie, on a $F_0 \neq E$. Par le Lemme de Riesz, il existe donc $x_1 \in E$ avec $\|x_1\| = 1$ tel que $\|x_1 - x_0\| \geq 1/2$

Soit F_2 le sous-espace vectoriel engendré par $\{x_0, x_1\}$. Alors F_2 est fermé et $F_2 \neq E$. Il existe donc $x_2 \in E$ avec $\|x_2\| = 1$ tel que $\|x_2 - x_0\| \geq 1/2$ et $\|x_2 - x_1\| \geq 1/2$. De proche en proche, on construit une suite $(x_n)_n$ dans $\overline{B}(0, 1)$ et telle que $\|x_n - x_k\| \geq 1/2$ pour tout $k < n$. La suite $(x_n)_n$ ne possède pas de sous-suite convergente. ■

2.5 Complété d'un espace vectoriel normé

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit d la distance associée. Soit $(\widehat{E}, \widehat{d})$ le complété de (E, d) ; voir Théorème 2.1.6. Nous allons voir que \widehat{E} peut être muni d'une structure d'espace vectoriel normé pour laquelle \widehat{E} est un espace de Banach.

Théorème 2.5.1 (Complété d'un espace vectoriel normé) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé .

(i) Il existe un espace de Banach $(\widehat{E}, \|\cdot\|)$ et une application linéaire isométrique $\widehat{f} : E \rightarrow \widehat{E}$ d'image dense.

(ii) Pour tout espace de Banach F et toute $T \in \mathcal{B}(E, F)$, il existe $S \in \mathcal{B}(\widehat{E}, F)$ unique telle que $T = S \circ \widehat{f}$; de plus, on a $\|S\| = \|T\|$.

(iii) L'espace \widehat{E} , est unique au sens suivant : soit \widetilde{E} un espace de Banach et $\widetilde{f} : E \rightarrow \widetilde{E}$ une application linéaire isométrique d'image dense. Alors il existe une bijection linéaire et isométrique $h : \widehat{E} \rightarrow \widetilde{E}$ avec $\widetilde{f} = h \circ \widehat{f}$.

Démonstration (i) Soit d la distance canonique sur E . Soit $(\widehat{E}, \widehat{d})$ le complété de l'espace métrique (E, d) et $\widehat{f} : E \rightarrow \widehat{E}$ une isométrie d'image dense (voir Théorème 2.1.6).

Soient $x, y \in \widehat{E}$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Il existe, par densité de l'image de \widehat{f} , des suites $(x_n)_n, (y_n)_n$ dans E telles que

$$\lim_n \widehat{f}(x_n) = x \quad \text{et} \quad \lim_n \widehat{f}(y_n) = y.$$

Comme \widehat{f} est une isométrie et comme $(\widehat{f}(x_n))_n$ et $(\widehat{f}(y_n))_n$ sont des suites de Cauchy, les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont de Cauchy. Comme

$$\|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)\| \leq \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\|,$$

il s'ensuit que la suite $(x_n + y_n)_n$ est de Cauchy. Par conséquent, $(\widehat{f}(x_n + y_n))_n$ est une suite de Cauchy. Comme \widehat{E} est complet, la limite de $(\widehat{f}(x_n + y_n))_n$ existe. Notons cette limite $x + y$. Vérifions que cette limite ne dépend pas du choix des suites $(x_n)_n, (y_n)_n$.

En effet, soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ d'autres suites dans E telles que $\lim_n \widehat{f}(u_n) = x$ et $\lim_n \widehat{f}(v_n) = y$. Considérons les suites $(w_n)_n, (z_n)_n$ définies par $w_{2n} = x_n$ et $w_{2n+1} = u_n$ ainsi que $z_{2n} = y_n$ et $z_{2n+1} = v_n$. Comme $\lim_n \widehat{f}(w_n) = x$ et $\lim_n \widehat{f}(z_n) = y$, on conclut comme plus haut que $(\widehat{f}(w_n + z_n))_n$ converge. Les suites $(\widehat{f}(x_n + y_n))_n$ et $(\widehat{f}(u_n + v_n))_n$ étant des sous-suites de $(\widehat{f}(w_n + z_n))_n$, on en déduit que

$$\lim_n \widehat{f}(u_n + v_n) = \lim_n \widehat{f}(w_n + z_n) = \lim_n \widehat{f}(x_n + y_n).$$

De manière similaire, la limite de $(\widehat{f}(\lambda x_n))_n$ existe et est indépendante de la suite $(x_n)_n$; notons la λx . On vérifie que \widehat{E} , muni des lois

$$(x, y) \mapsto x + y \quad \text{et} \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x,$$

est bien un espace vectoriel. L'élément neutre de $(\widehat{E}, +)$ est $\widehat{f}(0)$.

Observons que, par construction, l'application $\widehat{f} : E \rightarrow \widehat{E}$ est linéaire.

On définit une application $x \mapsto \|x\|$ sur \widehat{E} par

$$\|x\| = \widehat{d}(x, 0) \quad \text{pour tout } x \in \widehat{E},$$

où $0 = \widehat{f}(0)$ l'élément neutre de $(\widehat{E}, +)$. Montrons que ceci est bien une norme.

Observons tout d'abord que

$$\|x\| = \lim \|x_n\|,$$

pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments telle que $\lim_n \widehat{f}(x_n) = x$. En effet, comme \widehat{f} est une isométrie, on a

$$\begin{aligned} \|x\| &= \widehat{d}(x, 0) = \lim_n \widehat{d}(\widehat{f}(x_n), 0) = \lim_n \widehat{d}(\widehat{f}(x_n), \widehat{f}(0)) \\ &= \lim_n d(x_n, 0) = \lim_n \|x_n\|. \end{aligned}$$

Vérifions que les propriétés d'une norme sont bien satisfaites :

(N1) soit $x \in \widehat{E}$; on a $\|x\| = \widehat{d}(x, 0) \geq 0$ et si $\|x\| = 0$ alors $x = 0$.

(N2) soit $x \in \widehat{E}$ et $\lambda \in \mathbf{K}$; soit $(x_n)_n$ une suite dans E telle que $\lim_n \widehat{f}(x_n) = x$. Par définition, on a $\lambda x = \lim_n \widehat{f}(\lambda x_n)$. Par l'observation précédente, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \lim_n \|\lambda x_n\| = \lim_n |\lambda| \|x_n\| \\ &= |\lambda| \|x\| \end{aligned}$$

(N3) soient $x, y \in \widehat{E}$; soient $(x_n)_n, (y_n)_n$ des suites dans E telles que $\lim_n \widehat{f}(x_n) = x, \lim_n \widehat{f}(y_n) = y$. Par définition, on a $\lim_n \widehat{f}(x_n + y_n) = x + y$. On en conclut que

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \lim_n \|x_n + y_n\| \leq \lim_n \|x_n\| + \|y_n\| \\ &= \lim_n \|x_n\| + \lim_n \|y_n\| = \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

La distance associée à la norme $x \mapsto \|x\|$ est \widehat{d} . En effet, soient $x, y \in \widehat{E}$; soient $(x_n)_n, (y_n)_n$ des suites dans E telles que $\lim_n \widehat{f}(x_n) = x, \lim_n \widehat{f}(y_n) = y$.

Comme $\lim_n f(x_n - y_n) = x - y$, on a

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \lim_n \|x_n - y_n\| = \lim_n d(x_n, y_n) \\ &= \lim_n \widehat{d}(\widehat{f}(x_n), \widehat{f}(y_n)) = \widehat{d}(x, y). \end{aligned}$$

Ceci implique que \widehat{E} est un espace de Banach et que $\widehat{f} : E \rightarrow \widehat{E}$ est bien une isométrie linéaire entre les espaces vectoriels normés E et \widehat{E} d'image dense.

(ii) Par (i), nous pouvons identifier E , comme espace vectoriel normé, avec son image $\widehat{f}(E)$, qui est un sous-espace vectoriel dense de \widehat{E} .

Soit F un espace de Banach et $T \in \mathcal{B}(E, F)$. L'application linéaire T est lipschtzienne et donc uniformément continue; par le Théorème 2.1.4, T admet ainsi un prolongement continu $S : \widehat{E} \rightarrow F$, défini par $Sx = \lim_n Tx_n$ pour tout $x \in \widehat{E}$ et toute suite $(x_n)_n$ dans E avec $\lim_n x_n = x$.

On vérifie que S est linéaire en utilisant la densité de E et la linéarité de T . De plus, soit $x \in \widehat{E}$ et $(x_n)_n$ une suite dans E avec $\lim_n x_n = x$. On a alors

$$\begin{aligned} \|Sx\| &= \lim_n \|Tx_n\| \leq \|T\| \lim_n \|x_n\| \\ &= \|T\| \|x\|. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\|S\| \leq \|T\|$. Comme, de plus, $S|_E = T$, on a donc $\|S\| = \|T\|$.

(iii) Identifions, comme plus haut, E avec un sous-espace vectoriel dense de \widehat{E} . Soit \widetilde{E} un espace de Banach et $\widetilde{f} : E \rightarrow \widetilde{E}$ une application linéaire isométrique d'image dense.

Par (ii), \widetilde{f} s'étend en une isométrie linéaire $h : \widehat{E} \rightarrow \widetilde{E}$. Comme h est une isométrie et que \widehat{E} est complet, $h(\widehat{E})$ est un sous-espace complet et donc fermé de \widetilde{E} . Mais h est d'image dense (car \widetilde{f} l'est). Ceci montre que h est surjective. Donc $h : \widehat{E} \rightarrow \widetilde{E}$ est une bijection linéaire isométrique telle que $h|_E = \widetilde{f}$. ■

2.6 Quotient d'un espace vectoriel normé, séparé d'un espace vectoriel semi-normé

Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel fermé de E . On rappelle que E/F est le quotient de E par la relation d'équivalence

R définie par :

$$xRy \quad \text{si et seulement si} \quad x - y \in F.$$

Pour les opérations évidentes, E/F est un espace vectoriel et l'application-quotient $p : E \rightarrow E/F$ est linéaire. Pour $\xi = p(x) \in E/F$ on pose

$$\|\xi\| = \inf\{\|y\| : p(y) = \xi\} = \inf\{\|x - y\| : y \in F\}.$$

Théorème 2.6.1 (Quotient d'un espace vectoriel normé)

- (i) L'application $\xi \mapsto \|\xi\|$ est une norme sur E/F ;
- (ii) $p : E \rightarrow E/F$ est continue, de norme ≤ 1 ;
- (iii) $p : E \rightarrow E/F$ est une application ouverte ;
- (iv) si E est un espace de Banach, alors E/F l'est aussi.

Démonstration (i) Vérifions que les axiomes (N1), (N2), (N3) sont bien satisfaits :

(N1) : Supposons que $\|\xi\| = 0$; alors il existe une suite $(y_n)_n$ dans E telle que $\lim_n \|x - y_n\| = 0$. Comme F est fermé, cela implique que $x \in F$ et donc $\xi = 0$.

(N2) : Pour $\lambda \in \mathbf{K}$ avec $\lambda \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \|\lambda\xi\| &= \inf\{\|\lambda x - y\| : y \in F\} \\ &= \inf\{\|\lambda x - \lambda y\| : y \in F\} \\ &= |\lambda| \inf\{\|x - y\| : y \in F\} = |\lambda| \|\xi\|. \end{aligned}$$

Pour $\lambda = 0$, on a $\lambda\xi = 0$ et $\|0\| = \inf\{\|y\| : y \in F\} = 0$.

(N3) : Pour $\xi = p(x)$ et $\eta = p(y)$ dans E/F , on a

$$\begin{aligned} \|\xi + \eta\| &= \inf\{\|(x + y) - z\| : z \in F\} \\ &= \inf\{\|(x - z) + (z + y)\| : z, w \in F\} \\ &\leq \inf\{\|x - z\| + \|y - w\| : z, w \in F\} \\ &\leq \inf\{\|x - z\| : z \in F\} + \inf\{\|y - w\| : w \in F\} \\ &= \|\xi\| + \|\eta\|. \end{aligned}$$

(ii) On a $\|p(x)\| \leq \|x\|$, pour tout $x \in E$. Donc p est continue de norme ≤ 1 .

(iii) . Montrons d'abord que

$$B(\xi, \varepsilon) \subset p(B(x, \varepsilon))$$

pour toute boule $B(x, \varepsilon) \subset E$ et pour $\xi = p(x)$. En effet, soit $\eta = p(y) \in B(\xi, \varepsilon)$. Alors

$$\|\xi - \eta\| = \inf\{\|x - y + z\| : z \in F\} < \varepsilon.$$

Il existe donc $z \in F$ tel que $\|x - y + z\| < \varepsilon$. Alors $y - z \in B(x, \varepsilon)$. Comme $p(y - z) = p(y) = \eta$, on a bien $\eta \in p(B(x, \varepsilon))$.

Soit maintenant un ouvert U de E et soit $\xi \in p(U)$. Soit $x \in U$ avec $\xi = p(x)$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U$. Alors, d'une part, on a $p(B(x, \varepsilon)) \subset p(U)$. D'autre part, par ce qui a été vu plus haut, on a $B(\xi, \varepsilon) \subset p(B(x, \varepsilon))$ et donc $B(\xi, \varepsilon) \subset p(U)$. Ceci montre que $p(U)$ est ouvert.

(iv) Soit $(\xi_n)_n$ une suite de Cauchy dans E/F . Il existe une sous-suite $(\eta_n)_n$ de $(\xi_n)_n$ telle que $\|\eta_{n+1} - \eta_n\| < 2^{-n}$ pour tout n .

Pour tout n , il existe $u_n \in E$ avec $p(u_n) = \eta_{n+1} - \eta_n$ et $\|u_n\| < 2^{-n}$. Soit $x_0 \in E$ tel que $p(x_0) = \eta_0$ et posons

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} u_k \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Alors $x_{n+1} - x_n = u_n$ et donc $\|x_{n+1} - x_n\| < 2^{-n}$ pour tout n . La série de terme général $\|x_{n+1} - x_n\|$ est donc convergente. Comme

$$\|x_n - x_m\| \leq \sum_{k=m+1}^{n-1} \|x_{k+1} - x_k\|,$$

il s'ensuit que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy. Comme E est complet, $\lim_n x_n$ existe. Observons que $p(x_n) = \eta_n$. Par continuité de p , la limite $\lim_n \eta_n = \lim_n p(x_n)$ existe donc dans E/F .

La suite $(\eta_n)_n$ étant une sous-suite de $(\xi_n)_n$, la suite de Cauchy $(\xi_n)_n$ converge. ■

Soit E un espace vectoriel. Il arrive fréquemment (par exemple, dans le cas des espaces $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$; voir plus bas) qu'on ait seulement une semi-norme N (c-à-d une application $N : E \rightarrow \mathbf{R}_+$ satisfaisant à (N2) et (N3)) sur E . On construit alors un espace vectoriel normé associé à (E, N) de la manière suivante.

Théorème 2.6.2 (Séparé d'un espace vectoriel semi-normé) Soit $N : E \rightarrow \mathbf{R}_+$ une semi-norme sur l'espace vectoriel E . Soit

$$F = \{x \in E : N(x) = 0\}.$$

- (i) F est un sous-espace vectoriel de E ;
(ii) Pour $\xi = p(x) \in E/F$, on pose $\|\xi\| = N(x)$, où $p : E \rightarrow E/F$ est l'application quotient. L'application $\xi \mapsto \|\xi\|$ est bien définie et est une norme sur E/F .

Démonstration

- (i) Pour $x, y \in F$ et $\lambda, \beta \in \mathbf{K}$, on a, par (N3) et (N2),

$$N(\lambda x + \beta y) \leq N(\lambda x) + N(\beta y) = |\lambda|N(x) + |\beta|N(y) = 0,$$

et donc $\lambda x + \beta y \in F$.

- (ii) Supposons que $\xi = p(x) = p(y)$, pour $x, y \in E$. Alors $x - y \in F$ et donc $N(x - y) = 0$. D'autre part, par (N3), on a $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$. D'où $N(x) = N(y)$ et $\|\xi\|$ est bien défini.

Il est clair que $\|\xi\| \geq 0$. Supposons que $\|\xi\| = 0$. Alors $x \in F$ et donc $\xi = 0$. Ceci montre que (N1) est satisfait.

Les propriétés (N2) et (N3) découlent immédiatement des propriétés (N3) et (N2) pour N . ■

2.7 Une classe d'exemples : les espaces L^p

Nous supposons connues les notions de base de la théorie de la mesure.

Dans toute la suite, X désignera un ensemble muni d'un tribu \mathcal{B} et d'une mesure positive $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Soit $p \in [0, +\infty[$. On définit

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbf{K} : f \text{ est mesurable et } \int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty \right\} :$$

On pose $N_p(f) := \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$ pour $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$.

On définit également $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ comme étant l'ensemble des fonctions μ -essentiellement bornées sur X , c-à-d des fonctions mesurables $f : X \rightarrow \mathbf{K}$ pour lesquelles il existe une constante $C = C(f)$ et un ensemble $N = N(f) \in \mathcal{B}$ avec $\mu(N) = 0$ tels que $|f(x)| \leq C$ pour tout $x \in X \setminus N$. On pose alors

$$N_\infty(f) = \inf \{ C : |f(x)| \leq C \text{ pour } \mu \text{ presque tout } x \in X \}.$$

Nous énonçons sans preuve le résultat suivant :

Théorème 2.7.1 (i) $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un \mathbf{K} -espace vectoriel
(ii) N_p est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$.

L'inégalité suivante est essentielle dans la preuve de (ii) :

Théorème 2.7.2 (Inégalité de Hölder) Soient $p, q \in 0, +\infty[\cup\{+\infty\}$ tels que $1/p + 1/q = 1$ (avec la convention $1/\infty = 0$.) Pour tous $f \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu), g \in L^q(X, \mathcal{B}, \mu)$, on a $fg \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ et

$$\left| \int_X f(x)g(x)d\mu(x) \right| \leq N_p(f)N_q(g).$$

On note $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ le séparé de $(\mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu), N_p)$ et $\|\cdot\|_p$ la norme correspondante. Le théorème suivant est fondamental et fournit une classe importante d'espaces de Banach.

Théorème 2.7.3 (Théorème de Riesz-Fischer) L'espace $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$, muni de la norme $f \mapsto \|f\|_p$ est un espace de Banach.

Exemple 2.7.4 (i) Pour $X = \{1, \dots, n\}$, muni de la tribu de toutes les parties de X et de la mesure de comptage, $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ s'identifie à \mathbf{K}^n et la norme avec la norme

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

et $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$.

(ii) Soit $X = \mathbf{N}$, muni de la tribu de toutes les parties de X et de la mesure de comptage. L'espace $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ est l'espace ℓ^p (où $\ell^p(\mathbf{N})$ des suites $x = ((x_n)_n)$ de nombres $x_n \in \mathbf{K}$ telles que

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

pour $p \in [1, \infty[$ et $\|x\|_\infty = \max\{|x_n| : n \in \mathbf{N}\}$.

(iii) Soit $X = \mathbf{R}$ ou $[0, 1]$, muni de la tribu des boréliens de X et de la mesure de Lebesgue λ . On obtient les espaces de Banach classiques $L^p(\mathbf{R})$ ou $L^p([0, 1])$.

2.8 Exercices

Dans toute la suite, \mathbf{K} désigne \mathbf{R} ou \mathbf{C} .

Exercice 2.8.1 Soit T un ensemble et (X, d) un espace métrique complet. Soit $\ell^\infty(T, X)$ l'ensemble des applications bornées $x : T \rightarrow X$, muni de la distance $d_\infty(x, y) = \sup_{t \in T} d(x(t), y(t))$. Montrer que $(\ell^\infty(T, X), d_\infty)$ est complet.

Exercice 2.8.2 Pour $a < b$, soit $C[a, b]$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbf{K} muni de la distance $d_\infty(x, y) = \sup_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$. Montrer que $(C[a, b], d_\infty)$ est complet.

Exercice 2.8.3 Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit (X_n, d_n) un espace métrique. Soit $X = \prod_{n \in \mathbf{N}} X_n$ l'espace produit. Pour $x = (x_n)_n \in X$ et $y = (y_n)_n \in X$, on définit

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbf{N}} 2^{-n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

- (i) Montrer que d est une distance sur X .
- (ii) Montrer que (X, d) est complet si et seulement si (X_n, d_n) complet pour tout $n \in \mathbf{N}$.
- (iii) Montrer que (X, d) est compact si et seulement si (X_n, d_n) compact pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 2.8.4 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour $x \in X$ et $r > 0$, soit $B(x, r)$ (respectivement $\overline{B}(x, r)$) la boule ouverte (respectivement fermée) de centre x et de rayon r .

- (i) Montrer que $\overline{B}(x, r)$ est l'adhérence de $B(x, r)$.
- (ii) Montrer que $B(x, r)$ est l'intérieur de $\overline{B}(x, r)$.
- (iii) Donner un exemple d'espace métrique (E, d) pour lequel les énoncés (i) et (ii) sont faux.

Exercice 2.8.5 Montrer que les normes $x \mapsto \|x\|_\infty$, $x \mapsto \|x\|_1$ et $x \mapsto \|x\|_2$ sur \mathbf{K}^n sont mutuellement équivalentes.

Exercice 2.8.6 Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que l'adhérence \overline{F} de F dans E est un sous-espace vectoriel.

Exercice 2.8.7 Soit K un espace métrique compact et soit $C(K)$ l'espace vectoriel des fonctions continues $x : K \rightarrow \mathbf{K}$. Montrer que

$$x \mapsto \|x\|_\infty := \sup_{t \in K} |x(t)| \quad \forall x \in C(K)$$

est une norme sur $C(K)$ et que $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Exercice 2.8.8 Soit $C[0, 1]$ l'espace vectoriel des fonctions continues $x : K \rightarrow \mathbf{K}$.

(i) Montrer que

$$x \mapsto \|x\|_1 := \int_0^1 |x(t)| dt \quad \forall x \in C(K)$$

est un norme sur $C[0, 1]$.

(ii) Montrer que $(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.

Exercice 2.8.9 Montrer que l'espace vectoriel $C^1[0, 1]$ des fonctions continument dérivables $x : [0, 1] \rightarrow \mathbf{K}$, muni de la norme $x \mapsto \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$ est un espace de Banach.

Exercice 2.8.10 Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbf{K})$, vue comme application linéaire $\mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^n$.

(i) On munit \mathbf{K}^n de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que la norme associée de A est $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

(ii) On munit \mathbf{K}^n de la norme $\|\cdot\|_1$. Montrer que la norme associée de A est $\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

(iii) On munit \mathbf{K}^n de la norme $\|\cdot\|_2$. Montrer, pour que la norme associée de A , on a $\|A\| \leq \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$.

Exercice 2.8.11 Soit $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{K}$ une fonction continue. Pour tout $x \in C[0, 1]$, on définit $Kx : [0, 1] \rightarrow \mathbf{K}$ par $Kx(s) = \int_0^1 k(s, t)x(t)dt$.

(i) Montrer que $Kx \in C[0, 1]$, pour tout $x \in C[0, 1]$.

(ii) On munit $C[0, 1]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que l'application

$$K : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1], x \mapsto Kx$$

est linéaire et continue et que $\|K\| = \max_{0 \leq s \leq 1} \int_0^1 |k(s, t)| dt$.

Exercice 2.8.12 Soit $\alpha \in]0, 1]$. Soit $C^\alpha[0, 1]$ l'espace vectoriel des fonctions α -höldériennes $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{K}$ c-à-d telles qu'il existe $C = C(f) > 0$ avec $|f(t) - f(s)| \leq C|t - s|^\alpha$ pour tous $s, t \in [0, 1]$. Montrer que $C^\alpha[0, 1]$, muni de la norme

$$f \mapsto \|f\|_\infty + \sup_{t \neq s} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha},$$

est un espace de Banach.

Exercice 2.8.13 Soit E un espace vectoriel normé avec $E \neq 0$. Montrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{B}(E)$, on a $AB - BA \neq I$, où $I = \text{Id}_E$ est l'identité sur E .

Indication : Par contradiction, supposons que $AB - BA = I$. Montrer, par récurrence, que $AB^n - B^nA = nB^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2.8.14 On considère $C[0, 1]$ et $C^1[0, 1]$ munis de la norme $x \mapsto \|x\|_\infty$. Soit $T : C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1], x \mapsto x'$, l'opérateur de différentiation. Montrer que T n'est pas continu.

Exercice 2.8.15 Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel normé de dimension infinie. Montrer qu'il existe une forme linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbf{K}$ qui n'est pas continue.

Indication : Définir φ au moyen d'une base de E .

Exercice 2.8.16 Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel normé de dimension infinie. Montrer qu'il existe deux normes non équivalentes sur E .

Indication : Considérer une base $\{e_i : i \in I\}$ de E et définir des analogues des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$

Exercice 2.8.17 Soit E un espace vectoriel normé. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite éléments de E . On dit que la série de terme général x_n converge dans E si la suite $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $s_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$ est convergente dans E . On note alors $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sa limite.

On dit que la série de terme général x_n est *normalement convergente* si la série de terme général $\|x_n\|$ est convergente dans \mathbf{R} .

(i) Supposons que la série de terme général x_n soit normalement convergente. Montrer que la suite $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy.

(ii) On suppose que E est complet et que la série de terme général x_n est normalement convergente. Montrer que la série de terme général x_n converge et que

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|.$$

(iii) On suppose que toute série dans E qui est normalement convergente est convergente. Montrer que E est complet.

(iii) On suppose que E est complet et que $\limsup_n \|x_n\|^{1/n} < 1$. Montrer que la série de terme général x_n converge dans E .

Exercice 2.8.18 Soit E un espace vectoriel normé et soit $T \in \mathcal{B}(E)$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $T^n := T \circ \cdots \circ T$ (n fois), avec la convention $T^0 := I$.

(i) Soit $\alpha_n = \|T^n\|$. Montrer que $\alpha_{n+m} \leq \alpha_n \alpha_m$ pour tous n, m .

(ii) Dédurre de (i) que $\lim_n \|T^n\|^{1/n}$ existe et que l'on a

$$\lim_n \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbf{N}} \|T^n\|^{1/n} \leq \|T\|.$$

Indication : Montrer d'abord que, si $(a_n)_n$ est une suite dans \mathbf{R}^+ telle que $a_{n+m} \leq a_n a_m$ pour tous n, m , alors la suite $(a_n^{1/n})_n$ converge vers $\inf_{n \in \mathbf{N}} a_n^{1/n}$.

Exercice 2.8.19 Soit E un espace de Banach et soit $T \in \mathcal{B}(E)$.

(i) Montrer que la série de terme général T^n converge dans $\mathcal{B}(E)$ si et seulement si $\lim_n \|T^n\|^{1/n} < 1$.

Indication : Appliquer les Exercices 2.8.17 et 2.8.18.

(ii) On suppose que $\lim_n \|T^n\|^{1/n} < 1$. Vérifier que $I - T$ est inversible dans $\mathcal{B}(E)$ et que $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.

(iii) On suppose que $\|T\| < 1$. Montrer $I - T$ est inversible dans $\mathcal{B}(E)$ et qu'on a l'inégalité

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Exercice 2.8.20 Pour $a < b$, soient $\Delta = \{(s, t) \in [a, b]^2 : t \leq s\}$ et soit $k : \Delta \rightarrow \mathbf{K}$ une fonction continue. On munit $C[a, b]$ de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$. On définit l'opérateur de Volterra $V : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ par

$$Vx(s) = \int_a^s k(s, t)x(t)dt \quad \text{pour tout } x \in C[a, b].$$

On pose $\alpha := \max_{(s,t) \in \Delta} |k(s, t)|$.

(i) Vérifier que $V \in \mathcal{B}(C[a, b])$ et que $\|V\| \leq \alpha(b - a)$.

(ii) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\|V^n\| \leq \alpha^n \frac{(b - a)^n}{n!}$.

(iii) Montrer $I - V$ est inversible dans $\mathcal{B}(E)$ et déterminer $(I - V)^{-1}$.

Indication : Appliquer l'Exercice 2.8.19.

Exercice 2.8.21 Soient $p, q \in [1, +\infty[\cup\{+\infty\}$ tels que $1/p + 1/q = 1$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{K}^n$, on pose $\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$. Soit $x \in \mathbf{K}^n$. Montrer que

$$\|x\|_p = \sup\{|\varphi(x, y)| : y \in \mathbf{K}^n, \|y\|_q \leq 1\}.$$

Indication : Soit A l'expression de droite. Pour montrer l'inégalité $A \leq \|x\|_p$, traiter séparément les cas $p = \infty$, $p \in]1, +\infty[$ et $p = 1$.

Exercice 2.8.22 (i) Soit $p \in [1, +\infty[\cup\{+\infty\}$. Montrer que la norme de l'application $\text{Id} : (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_p)$ est $n^{1/p}$.

(ii) Soit $p \in [1, +\infty[\cup\{+\infty\}$. Montrer que la norme de l'application $\text{Id} : (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_p) \rightarrow (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_1)$ est $n^{1/q}$, où q est tel que $1/p + 1/q = 1$.

(iii) Soient $p_1, p_2 \in [1, +\infty[\cup\{+\infty\}$ tels que $p_1 < p_2$. Montrer que la norme de l'application $\text{Id} : (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_{p_2}) \rightarrow (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_{p_1})$ est $n^{1/p_2 - 1/p_1}$.

Exercice 2.8.23 Soient $p_1, p_2 \in [1, +\infty[\cup\{+\infty\}$ tels que $p_1 < p_2$.

(i) Montrer que $\|x\|_{p_2} \leq \|x\|_{p_1}$ pour tout $x \in \mathbf{K}^n$.

(ii) Montrer que $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$ et que $\|x\|_{p_2} \leq \|x\|_{p_1}$ pour tout $x \in \ell^{p_1}$. Peut-on avoir $\ell^{p_2} \subset \ell^{p_1}$?

Exercice 2.8.24 Soient $p_1, p_2 \in [1, +\infty[\cup\{+\infty\}$ tels que $p_1 < p_2$. Soit (X, \mathcal{B}, μ) un espace de probabilité. Montrer que $L^{p_2}(X, \mathcal{B}, \mu) \subset L^{p_1}(X, \mathcal{B}, \mu)$ et que $\|x\|_{p_1} \leq \|x\|_{p_2}$ pour tout $x \in \ell^{p_2}$.

Exercice 2.8.25 Soient $p_1, p_2 \in [1, +\infty[\cup\{+\infty\}$ tels que $p_1 < p_2$. Soit \mathbf{R} muni de la mesure de Lebesgue. Montrer que l'on a ni $L^{p_2}(\mathbf{R}) \subset L^{p_1}(\mathbf{R})$ ni $L^{p_1}(\mathbf{R}) \subset L^{p_2}(\mathbf{R})$.

Exercice 2.8.26 Soit $p \in [1, +\infty[\cup\{+\infty\}$. On note c le sous-espace vectoriel de ℓ^p des suites $(x_n)_n$ de support fini, c-à-d telles qu'il existe N avec $x_n = 0$ pour tout $n \geq N$.

(i) Montrer que c est dense dans ℓ^p pour $p \in [1, +\infty[$.

(ii) On note c_0 le sous-espace vectoriel de ℓ^∞ des suites $(x_n)_n$ avec $\lim_n x_n = 0$. Montrer que c_0 est l'adhérence de c dans ℓ^∞ .

(iii) Montrer que ℓ^p est séparable pour $p \in [1, +\infty[$.

(iv) Montrer que ℓ^∞ n'est pas séparable.

Exercice 2.8.27 On considère $C_{\mathbf{R}}[0, 1]$, l'espace vectoriel des fonctions continues $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, muni de la norme $f \mapsto \|f\|_{\infty}$. Soit $\varphi : C[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ la forme linéaire définie par

$$\varphi(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{pour tout } f \in C[0, 1].$$

- (i) Montrer que φ est continue.
- (ii) Montrer que $\|\varphi\| = 1$.
- (iii) Montrer qu'il n'existe pas de $f \in C[0, 1]$ avec $\|f\|_{\infty} \leq 1$ et tel que $|\varphi(f)| = 1$.

Chapitre 3

Espaces de Hilbert

3.1 Généralités sur les espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert sont la généralisation naturelle en dimension infinie des espaces euclidiens (ou hermitiens) \mathbf{R}^n (ou \mathbf{C}^n).

Définition 3.1.1 Soit E un espace vectoriel sur \mathbf{K} (on rappelle que \mathbf{K} est \mathbf{R} ou \mathbf{C}). Une forme *hermitienne* (on dit forme *symétrique* quand $\mathbf{K} = \mathbf{R}$) est une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbf{K}$, telle que, pour tous $x, x', y \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$,

- (i) $\varphi(x + x', y) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y)$
- (ii) $\varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y)$
- (iii) $\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$

(dans le cas $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, on a bien sûr $\overline{\varphi(x, y)} = \varphi(x, y)$).

On déduit de ce qui précède que :

- (iv) $\varphi(x, y + y') = \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$
- (v) $\varphi(x, \lambda y) = \overline{\lambda} \varphi(x, y)$
- (vi) $\varphi(x, x) \in \mathbf{R}$.

Une forme hermitienne φ est dite *positive* sur E si $\varphi(x, x) \geq 0$; elle est un *produit scalaire* si $\varphi(x, x) > 0$ pour tout $x \in E, x \neq 0$.

On notera en général un produit scalaire par $\langle x|y \rangle$.

Exemple 3.1.2 (i) La formule $\langle x|y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$ définit un produit scalaire sur \mathbf{K}^n .

(ii) La formule $\langle x|y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ définit un produit scalaire sur ℓ^2 .

(iii) Plus généralement, soit X un ensemble muni d'une tribu \mathcal{B} et d'une mesure positive $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$. La formule

$$\langle f|g \rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x)$$

définit un produit scalaire sur $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Théorème 3.1.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit φ une forme hermitienne (resp. symétrique) positive sur E . Alors, pour tous $x, y \in E$, on a

$$|\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x)\varphi(y, y).$$

Démonstration Soit $u \in \mathbf{K}$ avec $|u| = 1$ et tel que $u\varphi(x, y) = |\varphi(x, y)|$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\varphi(ux + ty, ux + ty) \geq 0.$$

D'autre part, comme $u\bar{u} = 1$ et $\varphi(ux, ty) = t|\varphi(x, y)|$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(ux + ty, ux + ty) &= \varphi(ux, ux) + 2\operatorname{Re}\varphi(ux, ty) + t^2\varphi(y, y) \\ &= \varphi(x, x) + 2t|\varphi(x, y)| + t^2\varphi(y, y). \end{aligned}$$

Ce polynôme en t de degré ≤ 2 est à coefficients réels et prend ses valeurs dans \mathbf{R}_+ ; son discriminant $|\varphi(x, y)|^2 - \varphi(x, x)\varphi(y, y)$ est donc ≤ 0 . ■

Corollaire 3.1.4 Toute une forme $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbf{K}$ hermitienne (resp. symétrique) positive sur un espace vectoriel normé E est continue.

Corollaire 3.1.5 Soit $(x, y) \mapsto \langle x|y \rangle$ un produit scalaire sur E . alors $x \mapsto \|x\| := \langle x|x \rangle^{1/2}$ est une norme sur E .

Démonstration La seule chose non évidente est l'inégalité triangulaire (N3). Soient $x, y \in E$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y|x + y \rangle \\ &= \langle x|x \rangle + 2\operatorname{Re}\langle x|y \rangle + \langle y|y \rangle \\ &\leq \langle x|x \rangle + 2|\langle x|y \rangle| + \langle y|y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Définition 3.1.6 (Espaces de Hilbert) Soit E un espace muni d'un produit scalaire $(x, y) \mapsto \langle x|y \rangle$. La norme $x \mapsto \|x\|$ introduite dans le corollaire précédent est la norme associée à ce produit scalaire. L'espace E est appelé *espace préhilbertien*.

On dit que E est un *espace de Hilbert* si l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est complet.

Exemple 3.1.7 (i) L'espace \mathbf{K}^n , muni du produit scalaire $\langle x|y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$, est un espace de Hilbert .

(ii) L'espace ℓ^2 , muni du produit scalaire $\langle x|y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$, est un espace de Hilbert .

(iii) Plus généralement, soit X un ensemble muni d'une tribu \mathcal{B} et d'une mesure positive $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Alors $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, muni du produit scalaire

$$\langle f|g \rangle = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x),$$

est un espace de Hilbert .

(iv) $C[0, 1]$, muni du produit scalaire

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} d\mu(x),$$

est un espace préhilbertien.

Proposition 3.1.8 (Identité de polarisation) Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbf{K}$ hermitienne (resp. symétrique) positive sur un espace vectoriel normé E .

(i) Dans le cas $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, on a pour tous $x, y \in E$,

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} (\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y))$$

(ii) Dans le cas $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, on a pour tous $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & \frac{1}{4} (\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x + y, x + y) + \\ & + i\varphi(x + iy, x + iy) - i\varphi(x - iy, x - iy)) \end{aligned}$$

Démonstration Dans les deux cas (i) et (ii), on a

$$(*) \quad \varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y) = 2\text{Re}(\varphi(x, y)).$$

L'assertion (i) en résulte.

Supposons que E est complexe. En remplaçant y par iy dans (*), on trouve,

$$\begin{aligned}\varphi(x + iy, x + iy) - \varphi(x - iy, x - iy) &= 2\operatorname{Re}(\varphi(x, iy)) \\ &= 2\operatorname{Im}(\varphi(x, y)).\end{aligned}$$

L'assertion (ii) en découle. ■

Théorème 3.1.9 *Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Le complété $(\widehat{E}, \|\cdot\|)$ de l'espace vectoriel normé E est un espace de Hilbert; plus précisément, soit $\widehat{f} : E \rightarrow \widehat{E}$ l'isométrie d'image dense. Alors il existe un produit scalaire $[\cdot | \cdot]$ tel que $\|x\| = [x|x]^{1/2}$ pour tout $x \in \widehat{E}$. De plus, on a $[\widehat{f}(x)|\widehat{f}(y)] = \langle x|y \rangle$, pour tous $x, y \in E$.*

Démonstration Sans perte de généralité, on peut supposer que E est un sous-espace dense de \widehat{E} .

Soient $x, y \in \widehat{E}$ et soient $(x_n)_n, (y_n)_n$ des suites dans E telles que $\lim_n x_n = x$ et $\lim_n y_n = y$.

Pour tous $n, m \in \mathbf{N}$, on a, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (Théorème 3.1.3) :

$$\begin{aligned}|\langle x_n | y_n \rangle - \langle x_m | y_m \rangle| &= |\langle x_n - x_m | y_n \rangle - \langle x_m | y_m - y_n \rangle| \\ &\leq |\langle x_n - x_m | y_n \rangle| + |\langle x_m | y_m - y_n \rangle| \\ &\leq \|y_n\| \|x_n - x_m\| + \|x_m\| \|y_m - y_n\|.\end{aligned}$$

Comme $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont convergentes, elles sont de Cauchy et sont bornées. Il s'ensuit que $(\langle x_n | y_n \rangle)_n$ est une suite de Cauchy dans \mathbf{R} . La limite

$$[x|y] := \lim_n \langle x_n | y_n \rangle$$

existe donc. On vérifie de la manière habituelle qu'elle ne dépend pas des suites choisies $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$; on vérifie également que $[x|y]$ est une forme hermitienne (ou symétrique) positive sur \widehat{E} .

Comme

$$\|x_n\| = \langle x_n | x_n \rangle^{1/2},$$

on a

$$[x|x] = \langle x_n | x_n \rangle = \|x\|^2 \quad \text{pour tout } x \in \widehat{E}.$$

Ceci implique que $(x, y) \mapsto [x|y]$ est un produit scalaire sur \widehat{E} et que sa norme associée est $x \mapsto \|x\|$.

L'identité de polarisation (Proposition 3.1.8) montre que la restriction de $(x, y) \mapsto [x|y]$ à $E \times E$ coïncide avec $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ■

Définition 3.1.10 Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $x, y \in E$. On dit que x et y sont *orthogonaux* si $\langle x|y \rangle = 0$. On dit que deux parties F et G de E sont orthogonales si $\langle x|y \rangle = 0$ pour tous $x \in F$ et $y \in G$. L'*orthogonal* de F est la partie

$$\{x \in E : \langle x|y \rangle = 0 \quad \text{pour tout } y \in F\},$$

notée F^\perp .

Proposition 3.1.11 Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et F une partie de E . L'orthogonal F^\perp de F est un sous-espace vectoriel fermé de E .

Démonstration Par sesquilinearité du produit scalaire, il est immédiat que F^\perp est un sous-espace vectoriel de E . Montrons que F^\perp est fermé.

Soit $x \in \overline{F^\perp}$ et soit $(x_n)_n \in F^\perp$ une suite telle que $\lim_n x_n = x$. Pour tout $y \in F$, on a alors $\langle x_n|y \rangle = 0$. Par continuité du produit scalaire (Corollaire 3.1.4), on a donc $\langle x|y \rangle = 0$. Donc $x \in F^\perp$. ■

Proposition 3.1.12 Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $x, y \in E$.

(i) (**Théorème de Pythagore**) Si x et y sont orthogonaux, alors

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

(ii) (**Lemme de la médiane ou identité du parallélogramme**) On a

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Démonstration On a la formule

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x|y \rangle + \|y\|^2.$$

L'assertion (i) en découle. En remplaçant y en $-y$ dans cette formule, on a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x|y \rangle + \|y\|^2.$$

En additionnant les deux formules, on voit que l'assertion (ii) est vraie. ■

Remarque 3.1.13 Le lemme de la médiane indique une propriété géométrique intéressante des espaces de Hilbert : les boules dans ces espaces sont “rondes” ; en effet, si x et y sont sur la sphère unité, c-à-d $\|x\| = \|y\| = 1$, alors le milieu $(x + y)/2$ du segment $[x, y]$ n’appartient pas à la sphère unité.

3.2 Le théorème de la projection

Dans cette section, nous supposons que $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est *complet*, c-à-d un espace de Hilbert .

Nous noterons généralement par \mathcal{H} les espaces de Hilbert .

Le théorème de la projection est l’outil-clé pour l’étude des espaces de Hilbert .

Théorème 3.2.1 (Théorème de la projection) Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert . Soit C une partie non vide, convexe et fermée de \mathcal{H} . Pour tout $x \in \mathcal{H}$, il existe un unique $y_0 \in C$ tel que

$$\|x - y_0\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}.$$

De plus, on a

$$\operatorname{Re}\langle x - y_0 | y - y_0 \rangle \leq 0 \quad \text{pour tout } y \in C.$$

Démonstration Soit $d := \min\{\|x - y\| : y \in C\}$. Il existe une suite $(y_n)_{n \geq 1}$ dans C telle que $\lim_n \|x - y_n\| = d$. (Une telle suite est appelée *suite minimisante*.)

• **Existence** Soient $n, m \in \mathbf{N}^*$. Par le lemme de la médiane (Proposition 3.1.12), appliqué à $u_m = x - y_m$ et $u_n = x - y_n$, on a

$$\|u_m + u_n\|^2 + \|u_m - u_n\|^2 = 2(\|u_m\|^2 + \|u_n\|^2).$$

Comme

$$u_m + u_n = 2 \left(x - \frac{y_m + y_n}{2} \right) \quad \text{et} \quad u_m - u_n = y_n - y_m,$$

on a donc

$$4 \left\| x - \frac{y_m + y_n}{2} \right\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2.$$

Comme C est convexe, on a $(y_m + y_n)/2 \in C$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - 4\left\|x - \frac{y_m + y_n}{2}\right\|^2 \\ &\leq 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - 4d^2. \end{aligned}$$

Comme $\lim_m \|x - y_m\|^2 = d^2$, ceci montre que $(y_n)_n$ est une suite de Cauchy dans \mathcal{H} . L'espace \mathcal{H} étant complet, la limite $y_0 = \lim_n y_n$ existe. Comme C est fermé, on a $y_0 \in C$.

On a alors, d'une part, $\lim_n \|x - y_m\| = \|x - y_0\|$. D'autre part,

$$\lim_n \|x - y_n\| = d.$$

D'où $\|x - y_0\| = d$.

• **Unicité** Soit $y_1 \in C$ tel que $\|x - y_1\| = d$. Alors, la suite $y_0, y_1, y_0, y_1, \dots$ est une suite minimisante. Par ce qui précède, cette suite converge dans \mathcal{H} . Ceci montre que $y_1 = y_0$.

Soit $y \in C$. Montrons que $\operatorname{Re}\langle x - y_0 | y - y_0 \rangle \leq 0$. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \|y_0 + t(y - y_0) - x\|^2 = \|y_0 - x\|^2 + 2t\operatorname{Re}\langle y_0 - x | y - y_0 \rangle + t^2\|y - y_0\|^2.$$

Par convexité de C , on a $y_0 + t(y - y_0) \in C$ et donc

$$f(t) \geq d^2 = f(0) \quad \text{pour tout } t \in [0, 1].$$

Il s'ensuit que $f'(0) \geq 0$, c-à-d

$$\operatorname{Re}\langle y_0 - x | y - y_0 \rangle \geq 0 \blacksquare$$

Le théorème précédent s'applique au cas où C est un sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{H} .

Corollaire 3.2.2 Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et soit \mathcal{K} un sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{H} . Pour tout $x \in \mathcal{H}$, notons $Px \in \mathcal{K}$ l'unique élément de \mathcal{K} défini par $\|x - Px\| = \min\{\|x - y\| : y \in \mathcal{K}\}$.

(i) $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ est linéaire, continue, de norme 1 et $P|_{\mathcal{K}} = \operatorname{Id}_{\mathcal{K}}$.

(ii) On a $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp = \mathcal{H}$.

(iii) Pour tout $x = x_1 + x_2 \in \mathcal{H}$ avec $x_1 \in \mathcal{K}$ et $x_2 \in \mathcal{K}^\perp$, on a $Px = x_1$.

Démonstration Soit $x \in \mathcal{H}$. Notons $y_0 = Px$ l'élément de \mathcal{K} défini au théorème précédent. Soit $y \in \mathcal{K}$ et $t \in \mathbf{K}$. Comme $y_0 + ty \in \mathcal{K}$, on a

$$\operatorname{Re}\langle x - y_0 | ty \rangle \leq 0.$$

En prenant $t = \langle x - y_0 | y \rangle$, on a donc $|t|^2 = t\bar{t} \leq 0$. Ceci montre que

$$\langle x - y_0 | y \rangle = 0 \quad \text{pour tout } y \in \mathcal{K}.$$

On a donc $x - y_0 = x - Px \in \mathcal{K}^\perp$.

Comme $x = Px + (x - Px)$, ceci montre, d'une part, que $\mathcal{K} + \mathcal{K}^\perp = \mathcal{H}$ et donc $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp = \mathcal{H}$, car $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}^\perp = \{0\}$.

D'autre part, ce qui précède montre aussi que, si $x = x_1 + x_2 \in \mathcal{H}$ avec $x_1 \in \mathcal{K}$ et $x_2 \in \mathcal{K}^\perp$, alors $Px = x_1$. La linéarité de $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ en découle. Par le théorème de Pythagore (Proposition 3.1.12), on a $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2$ et donc $\|Px\| \leq \|x\|$. Donc P est continue et $\|P\| \leq 1$. Comme $Px = x$ pour tout $x \in \mathcal{K}$, on a $\|P\| = 1$. ■

Définition 3.2.3 (Projection orthogonale) Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et soit \mathcal{K} un sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{H} . L'application $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ définie plus haut s'appelle la *projection orthogonale* sur \mathcal{K} .

Définition 3.2.4 (Partie totale d'un espace vectoriel normé) Soit E un espace vectoriel normé. Une partie de A est dite *totale* si $\operatorname{Vect}(A)$, le plus petit sous-espace vectoriel de \mathcal{H} contenant A , est dense dans E .

Remarque 3.2.5 Rappelons qu'un espace métrique E est dit séparable si E contient une partie dénombrable dense. Supposons maintenant que E un espace vectoriel normé. Alors E est séparable si et seulement s'il existe une partie totale dénombrable dense dans E (voir Exercice 3.9.8)

Corollaire 3.2.6 Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert.

- (i) Soit A une partie de \mathcal{H} . Alors $(A^\perp)^\perp$ est le plus petit sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{H} contenant A , c-à-d $(A^\perp)^\perp$ est l'adhérence de $\operatorname{Vect}(A)$.
- (ii) Soit F un sous-espace vectoriel de \mathcal{H} . Alors $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$. En particulier, si F est un sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{H} , alors $(F^\perp)^\perp = F$.
- (iii) Une partie A de \mathcal{H} est totale si et seulement si $A^\perp = \{0\}$.

Démonstration

(i) Soit \mathcal{K} le plus petit sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{H} contenant A . Comme A est orthogonal à A^\perp , il est clair que $(A^\perp)^\perp$ contient A . D'autre part, $(A^\perp)^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{H} (Proposition 3.1.11). On a donc $\mathcal{K} \subset (A^\perp)^\perp$.

D'autre part, on a $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp$ ainsi que $\mathcal{H} = (A^\perp)^\perp \oplus A^\perp$ (Corollaire 3.2.2). Comme $A \subset \mathcal{K}$, on a $\mathcal{K}^\perp \subset A^\perp$. Par ce qui précède, on a aussi $\mathcal{K} \subset (A^\perp)^\perp$. D'où $\mathcal{K} = (A^\perp)^\perp$.

(ii) En prenant $A = F$, on voit que l'assertion est une conséquence de (i).

(iii) Supposons que A est totale. Alors, par (i), $(A^\perp)^\perp = \mathcal{H}$. Comme $\mathcal{H}^\perp = \{0\}$, il s'ensuit que $((A^\perp)^\perp)^\perp = \{0\}$. Comme $A^\perp \subset ((A^\perp)^\perp)^\perp$, on a donc $A^\perp = \{0\}$.

Réciproquement, supposons que $A^\perp = \{0\}$. Alors, $(A^\perp)^\perp = \mathcal{H}$. Par (i), $(A^\perp)^\perp$ est le plus petit sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{H} contenant A . ■

3.3 Dual d'un espace de Hilbert : le théorème de Riesz

Soit E un espace préhilbertien. Pour tout $x \in E$, on définit une forme linéaire $\varphi_x : E \rightarrow \mathbf{K}$ par

$$\varphi_x(y) = \langle y|x \rangle \quad \text{pour tout } y \in E.$$

Proposition 3.3.1 (i) Pour tout $x \in E$, la forme linéaire φ_x est continue de norme $\|x\|$.

(ii) L'application $\varphi : E \rightarrow E', x \mapsto \varphi_x$ est une isométrie antilinéaire (linéaire si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$).

Démonstration

(i) Pour tout $y \in E$, on a

$$|\varphi_x(y)| = |\langle y|x \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (Théorème 3.1.3). Ceci montre que $\varphi_x \in E'$ et que $\|\varphi_x\| \leq \|x\|$. D'autre part, on a

$$|\varphi_x(x)| = \langle x|x \rangle = \|x\|^2.$$

Il s'ensuit que $\|\varphi_x\| = \|x\|$.

(ii) On vérifie immédiatement que

$$\varphi_{x_1+x_2} = \varphi_{x_1} + \varphi_{x_2} \quad \text{et} \quad \varphi_{\lambda x} = \bar{\lambda}\varphi_x,$$

pour tous $x_1, x_2, x \in \mathcal{H}$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Ceci montre que φ est antilinéaire. Par (i), φ est une isométrie. ■

Théorème 3.3.2 (Théorème de Riesz) Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert. L'isométrie antilinéaire $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}', x \mapsto \varphi_x$ est une bijection.

Démonstration Au vu de la proposition précédente, il reste à montrer que φ est surjective.

Soit $f \in \mathcal{H}'$. Son noyau $\mathcal{K} = \text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{H} . Si $\mathcal{K} = \{0\}$, alors $f = 0$ et donc $f = \varphi(0)$. On peut donc supposer que $\mathcal{K} \neq \{0\}$. Alors \mathcal{K} est de codimension 1. Comme \mathcal{K}^\perp est un supplémentaire de \mathcal{K} , il existe donc $x \in \mathcal{K}^\perp$ avec $x \neq 0$ tel que $\mathcal{K}^\perp = \mathbf{K}x$. Comme $\varphi_x(x) = \|x\|^2 \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $\varphi(x) = \lambda\varphi_x(x)$. On considère alors $\varphi_{\bar{\lambda}x}$. Alors, d'une part,

$$\varphi_{\bar{\lambda}x}(y) = \langle y | \bar{\lambda}x \rangle = 0 \quad \text{pour tout } y \in \mathcal{K},$$

car $\lambda x \in \mathcal{K}^\perp$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{\lambda}x}(x) &= \langle x | \bar{\lambda}x \rangle \\ &= \lambda \langle x | x \rangle = \lambda\varphi_x(x) = f(x). \end{aligned}$$

D'où $f = \varphi_{\bar{\lambda}x}$ ■

3.4 Bases hilbertiennes

Dans les espaces de Hilbert de dimension infinie, il n'existe pas de base orthonormée. Cette notion sera remplacée avantageusement par celle d'une base hilbertienne.

Soit E un espace préhilbertien ; pour éviter des banalités, on supposera que $E \neq \{0\}$.

Définition 3.4.1 (Famille orthonormée, base hilbertienne)

- (i) Une famille $\{x_i : i \in I\}$ d'éléments de E est dite *orthonormée* si $\|x_i\| = 1$ et $\langle x_i | x_j \rangle = 0$ pour tous $i, j \in I$ avec $i \neq j$.
- (ii) Une *base hilbertienne* de E est une famille orthonormée $\{x_i : i \in I\}$ qui est totale.

La construction explicite de bases hilbertiennes se fait au moyen du procédé suivant.

Théorème 3.4.2 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit $N = \{0, \dots, d\}$ pour $d \in \mathbf{N}$ ou bien $N = \mathbf{N}$. Soit $\{x_n : n \in N\}$ une suite de vecteurs linéairement indépendants dans E . Alors, il existe une famille orthonormée $\{y_n : n \in N\}$ telle que, pour tout $n \in N$, on ait

$$\text{Vect}(\{x_0, \dots, x_n\}) = \text{Vect}(\{y_0, \dots, y_n\}).$$

Démonstration Pour tout $n \in N$, l'espace $E_n := \text{Vect}(\{x_0, \dots, x_n\})$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie et est donc un espace complet (2.4.1).

Soit $n \in N$. Avec la convention $E_{-1} = \{0\}$, on a $E_{n-1} \subset E_n$; comme E_n est un espace de Hilbert, nous pouvons considérer la projection orthogonale $P_n : E_n \rightarrow E_{n-1}$. On a

$$x'_n := x_n - P_n x_n \in E_{n-1}^\perp \cap E_n.$$

Posons $y_n = \|x'_n\|^{-1} x'_n$ et montrons que $\{y_n : n \in N\}$ est une famille orthonormée telle que, pour tout $n \in N$,

$$\text{Vect}(\{y_0, \dots, y_n\}) = E_n.$$

Tout d'abord, on a $y_n \in E_{n-1}^\perp \cap E_n$. Ensuite, $\|y_n\| = 1$ par construction. Soient $n < m$; alors $y_n \in E_n$ et $y_m \in E_{m-1}^\perp$. Donc $y_m \in E_n^\perp$ car $E_n \subset E_{m-1}$. Ceci montre que y_n et y_m sont orthogonaux.

Il reste à prouver qu'avec $F_n = \text{Vect}(\{y_0, \dots, y_n\})$, on a $F_n = E_n$. Pour cela, nous procédons par récurrence sur n . Le cas $n = 0$ est clair, car $x'_0 = x_0$ et $y_0 = \|x'_0\|^{-1} x'_0$. Supposons que $F_n = E_n$ pour $n \geq 0$. Comme $x_{n+1} - x'_{n+1} = P_{n+1} x_{n+1} \in E_n$, il s'ensuit que

$$x_{n+1} \in \text{Vect}(\{x'_{n+1}\} \cup E_n) = \text{Vect}(\{y_{n+1}\} \cup F_n) = F_{n+1}.$$

et que

$$y_{n+1} \in \text{Vect}(\{x_{n+1}\} \cup E_n) = E_{n+1}.$$

Ceci montre que $E_{n+1} = F_{n+1}$ ■

Théorème 3.4.3 (Existence de bases hilbertiennes : cas séparable)
Soit E un espace préhilbertien séparable. Alors E admet une base hilbertienne dénombrable.

Démonstration Soit D une partie dénombrable et dense de E . Nous pouvons extraire de D une suite $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ de vecteurs linéairement indépendants dans E telle que $\text{Vect}(\{x_n, n \in \mathbf{N}\}) = \text{Vect}(D)$, où $N = \{0, \dots, d\}$ pour $d \in \mathbf{N}$ ou bien $N = \mathbf{N}$.

Par le théorème précédent, il existe une famille orthonormée $\{y_n : n \in N\}$ telle que, pour tout $n \in N$, on ait

$$\text{Vect}(\{y_0, \dots, y_n\}) = \text{Vect}(D).$$

Il nous reste à montrer que $\mathcal{Y} = \{y_n : n \in N\}$ est totale. Ceci est clair car D est totale ■

Remarque 3.4.4 Le théorème précédent donne un algorithme explicite pour construire, à partir d'une suite $\{x_n : n \in N\}$ de vecteurs linéairement indépendants dans E , une base hilbertienne $\{y_n : n \in N\}$:

$$\begin{aligned} x'_0 &= x_0 & y_0 &:= \|x'_0\|^{-1} x'_0 \\ x'_1 &:= x_1 - \langle x_1 | y_0 \rangle y_0 & y_1 &:= \|x'_1\|^{-1} x'_1 \\ x'_2 &:= x_2 - \langle x_2 | y_0 \rangle y_0 - \langle x_2 | y_1 \rangle y_1 & y_2 &:= \|x'_2\|^{-1} x'_2 \\ x'_{n+1} &:= x_{n+1} - \sum_{k=0}^n \langle x_{n+1} | y_k \rangle y_k & y_{n+1} &:= \|x'_{n+1}\|^{-1} x'_{n+1} \end{aligned}$$

Le résultat suivant montre l'existence de bases hilbertiennes dans le cas non-séparable.

Théorème 3.4.5 (Existence de bases hilbertiennes : cas général)
Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert. Soit $X = \{x_i : i \in I\}$ un système orthonormé. Alors il existe une base hilbertienne de \mathcal{H} contenant X . En particulier, \mathcal{H} admet une base hilbertienne.

Démonstration Soit \mathcal{X} l'ensemble des systèmes orthonormés de \mathcal{H} contenant X . Ordonnons \mathcal{X} par inclusion. Montrons l'existence d'un élément maximal de \mathcal{X} . Observons les deux faits suivants.

- \mathcal{X} n'est pas vide : en effet, $X \in \mathcal{X}$.
- \mathcal{X} est inductif : en effet, soit $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ une partie totalement ordonnée de \mathcal{X} . Alors $Y := \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ est une famille orthonormée contenant X .

Le Lemme de Zorn s'applique donc et assure que \mathcal{X} possède un élément maximal Y . Alors X est total. En effet, sinon il existerait $x \in Y^\perp$ avec $\|x\| = 1$ (Corollaire 3.2.6). Alors $Y \cup \{x\}$ serait dans \mathcal{X} et ceci contredirait la maximalité de Y . ■ .

Exemple 3.4.6 (i) $\{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ est une base hilbertienne de ℓ^2 .
(ii) Soit $E = C_{\text{per}}(\mathbf{R})$ l'espace des fonctions à valeurs complexes sur \mathbf{R} qui continues et 1-périodiques ; on munit E du produit scalaire

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, soit $e_n \in E$ la fonction définie par

$$e_n(t) = e^{2\pi int} \quad \text{pour tout } t \in \mathbf{R}.$$

Alors $\{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ est famille orthormée de E . En fait, on montre que $\{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ est une base hilbertienne de E . (voir Cours sur les séries de Fourier).

(iii) Soit $\mathcal{H} = L^2[-1, 1]$. La famille des monômes

$$X = \{t \mapsto t^n : n \in \mathbf{N}\}$$

est libre et totale dans \mathcal{H} . Par le procédé de Gram-Schmidt, on obtient (voir Exercice 3.9.12) la base hilbertienne de $L^2[-1, 1]$ formée des polynômes de Legendre

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} ((x^2 - 1)^n), \quad n \in \mathbf{N}.$$

3.5 Inégalité de Bessel, égalité de Parseval

Théorème 3.5.1 (Inégalité de Bessel) Soit E un espace préhilbertien. Soit $N = \{0, \dots, d\}$ pour $d \in \mathbf{N}$ ou bien $N = \mathbf{N}$. Soit $(e_n)_{n \in N}$ une suite

orthonormale dans E . Alors, pour tout $x \in E$, La série de terme général $|\langle x|e_n\rangle|^2$ est convergente et on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x|e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$y_n = \sum_{k=0}^n \langle x|e_k\rangle e_k.$$

Alors, pour tout $l \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \langle x - y_n|e_l\rangle &= \left\langle x - \sum_{k=0}^n \langle x|e_k\rangle e_k | e_l \right\rangle \\ &= \langle x|e_l\rangle - \sum_{k=0}^n \langle x|e_k\rangle \langle e_k|e_l\rangle \\ &= \langle x|e_l\rangle - \langle x|e_l\rangle = 0. \end{aligned}$$

Ceci implique que $\langle x - y_n|y_n\rangle = 0$. On a ainsi (Théorème de Pythagore)

$$\|x - y_n\|^2 + \|y_n\|^2 = \|x\|^2,$$

et donc $\|y_n\|^2 \leq \|x\|^2$. Comme

$$\begin{aligned} \|y_n\|^2 &= \left\| \sum_{k=0}^n \langle x|e_k\rangle e_k \right\|^2 \\ &= \sum_{k=0}^n |\langle x|e_k\rangle|^2, \end{aligned}$$

on a ainsi

$$\sum_{k=0}^n |\langle x|e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Les sommes partielles de la série numérique de terme général positif $|\langle x|e_n\rangle|^2$ sont donc bornées par $\|x\|^2$. L'assertion en découle ■

Lemme 3.5.2 (Théorème de Pythagore généralisé) Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite orthogonale dans \mathcal{H} . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) La série numérique $\sum_{n \in \mathbf{N}} \|x_n\|^2$ est convergente dans \mathbf{R} .

(ii) La série $\sum_{n \in \mathbf{N}} x_n$ est convergente dans \mathcal{H} .

Dans ce cas, on a $\left\| \sum_{n \in \mathbf{N}} x_n \right\|^2 = \sum_{n \in \mathbf{N}} \|x_n\|^2$.

Démonstration Pour tous $m < n \in \mathbf{N}$, on a (Théorème de Pythagore 3.1.12)

$$\left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^n \|x_k\|^2.$$

Ceci montre que $(\sum_{k=0}^n x_k)_n$ est une suite de Cauchy dans \mathcal{H} si et seulement si $(\sum_{k=0}^n \|x_k\|^2)_n$ est une suite de Cauchy dans \mathbf{R} . Comme \mathcal{H} et \mathbf{R} sont complets, l'équivalence de (i) et (ii) en découle.

Sous l'hypothèse (i) ou (ii), on conclut, en passant à la limite $n \rightarrow \infty$ dans l'égalité, que

$$\left\| \sum_{k=0}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^n \|x_k\|^2 \blacksquare$$

Théorème 3.5.3 (Égalité de Parseval) Soit E un espace préhilbertien séparable. Soit $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une base hilbertienne de E avec $N = \{0, \dots, d\}$ pour $d \in \mathbf{N}$ ou bien $N = \mathbf{N}$. Soit $x \in E$.

(i) La série de terme général $|\langle x|e_n \rangle|^2$ est convergente et on a

$$\sum_{n \in N} |\langle x|e_n \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

(ii) La série de terme général $\langle x|e_n \rangle e_n$ est convergente dans E et on a

$$\sum_{n \in N} \langle x|e_n \rangle e_n = x.$$

Démonstration Soit \mathcal{H} le complété de E (voir Théorème 3.1.9). On peut supposer que $E \subset \mathcal{H}$.

Par le théorème précédent, la série de terme général $|\langle x|e_n \rangle|^2$ est convergente. Par le Lemme 3.5.2, la série de terme général $\langle x|e_n \rangle e_n$ est donc convergente dans \mathcal{H} et on a

$$\left\| \sum_{n \in N} \langle x|e_n \rangle e_n \right\|^2 = \sum_{n \in N} |\langle x|e_n \rangle|^2.$$

Posons $y = \sum_{n \in N} \langle x | e_n \rangle e_n \in \mathcal{H}$. Alors $\langle y | e_n \rangle = \langle x | e_n \rangle$ pour tout $n \in N$. Il s'ensuit que $\langle y - x | e_n \rangle = 0$ pour tout $n \in N$. Comme $(e_n)_{n \in N}$ une base hilbertienne de \mathcal{H} , on a donc $y = x$. Ceci démontre les assertions (i) et (ii) ■

Remarque 3.5.4 Pour des raisons qui seront claires plus bas (Exemple 3.5.8), l'identité $x = \sum_{n \in N} \langle x | e_n \rangle e_n$ est souvent appelé *développement de Fourier* de x selon la base hilbertienne $(e_n)_n$

Corollaire 3.5.5 Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable. Soit \mathcal{K} un sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{H} et $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ la projection orthogonale sur \mathcal{K} . Soit $(e_n)_{n \in N}$ une base hilbertienne de \mathcal{K} , avec $N = \{0, \dots, d\}$ pour $d \in \mathbf{N}$ ou bien $N = \mathbf{N}$. Alors, pour tout $x \in \mathcal{H}$, la série $\sum_{n \in N} \langle x | e_n \rangle e_n$ est convergente dans \mathcal{K} et on a

$$Px = \sum_{n \in N} \langle x | e_n \rangle e_n.$$

Démonstration Comme $x - Px \in \mathcal{K}^\perp$, on a

$$\langle x | e_n \rangle = \langle Px | e_n \rangle \quad \text{pour tout } n \in N.$$

On applique alors le théorème précédent à Px ■

Définition 3.5.6 (Isomorphisme d'espaces de Hilbert) Deux espaces de Hilbert \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 sont dits *isomorphes* s'il existe une bijection linéaire $f : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ telle que

$$\langle f(x) | f(y) \rangle = \langle x | y \rangle \quad \text{pour tous } x, y \in \mathcal{H}_1.$$

On dit alors que f est un isomorphisme entre les espaces de Hilbert \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 .

Observons que, par l'identité de polarisation (Proposition 3.1.8), si $f : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ une bijection linéaire et isométrique, alors f est un isomorphisme.

Corollaire 3.5.7 (Classification des espaces de Hilbert séparables) Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable.

Si \mathcal{H} est de dimension finie n , alors \mathcal{H} est isomorphe à $\ell^2(n)$, où $\ell^2(n)$ est l'espace \mathbf{K}^n muni de la norme euclidienne.

Si \mathcal{H} est de dimension infinie, \mathcal{H} est isomorphe à ℓ^2 .

Démonstration Comme \mathcal{H} est séparable, \mathcal{H} possède une base hilbertienne dénombrable (Théorème 3.4.3). Soit $(e_k)_{k \in N}$ une telle base, avec $N = \{1, \dots, n\}$ si \mathcal{H} est de dimension finie n et $N = \mathbf{N}$ sinon.

Posons $\mathcal{K} = \ell^2(n)$ si $N = \{1, \dots, n\}$ et $\mathcal{K} = \ell^2$ si $N = \mathbf{N}$.

Pour tout $x \in \mathcal{H}$, la suite $(\langle x | e_k \rangle)_{k \in N}$ est dans \mathcal{K} , par le Théorème 3.5.3. Soit $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ l'application linéaire définie par

$$f(x) = (\langle x | e_k \rangle)_{k \in N} \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

Alors f est une isométrie par le Théorème 3.5.3. Il reste à montrer que f est surjective.

Soit $(a_k)_{k \in N} \in \mathcal{K}$. Le Lemme 3.5.2 montre que la série $\sum_{k \in N} a_k e_k$ converge dans \mathcal{H} . Soit x sa limite. On vérifie immédiatement que $f(x) = (a_k)_{k \in N}$ ■

Exemple 3.5.8 (Formule de Fourier-Plancherel) Soit $C_{\text{per}}(\mathbf{R})$ l'espace des fonctions à valeurs complexes sur \mathbf{R} qui sont continues et 1-périodiques ; on munit $C_{\text{per}}(\mathbf{R})$ du produit scalaire

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Pour $n \in \mathbf{Z}$, soit $e_n \in C_{\text{per}}(\mathbf{R})$ définie par $e_n(t) = e^{2\pi i n t}$. La famille $\{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ est une base hilbertienne de E (voir Exemple 3.4.6.ii).

Les coefficients de Fourier $c_n(f)$ de $f \in C_{\text{per}}(\mathbf{R})$ sont définies par

$$c_n(f) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt = \langle f | e_n \rangle \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{Z}.$$

De l'égalité de Parseval, on déduit la *formule de Fourier-Plancherel*

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2.$$

3.6 Réflexivité des espaces de Hilbert

Soit E un espace vectoriel normé et E' son dual (topologique). Le dual de E' s'appelle le *bidual* de E et se note E'' .

Pour $x \in E$, soit $j_x \in E''$ défini par

$$j_x(\varphi) = \varphi(x) \quad \text{pour tout } \varphi \in E'.$$

Observons que j_x est bien dans E'' . En effet, on a

$$|j_x(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \|x\| \quad \text{pour tout } \varphi \in E',$$

ce qui montre que j_x est continue et de norme $\|j_x\| \leq \|x\|$.

On obtient ainsi une application linéaire et continue

$$j : E \rightarrow E'', \quad x \mapsto j_x.$$

Définition 3.6.1 (Espace vectoriel normé réflexif) L'espace vectoriel normé est dit *réflexif* si $j : E \rightarrow E''$ est une bijection.

En fait, nous verrons plus tard (voir Corollaire 4.1.4), comme conséquence du théorème de Hahn-Banach, que j est une isométrie, c-à-d $\|j_x\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$. Par conséquent, j est toujours injective et E sera réflexif si et seulement si j est surjective.

Théorème 3.6.2 (Réflexivité des espaces de Hilbert) *Tout espace de Hilbert est réflexif.*

Démonstration

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert, Rappelons que, pour tout $x \in \mathcal{H}$, la forme linéaire $\varphi_x \in \mathcal{H}'$ est définie par $\varphi_x(y) = \langle y|x \rangle$ pour tout $y \in \mathcal{H}$ et que l'application $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$, $x \mapsto \varphi_x$ est une bijection anti-linéaire isométrique (Théorème de Riesz 3.3.2).

• j est surjective : soit $\ell \in \mathcal{H}''$. Alors $\varphi_\ell : x \mapsto \overline{\ell(\varphi_x)}$ est une forme linéaire sur \mathcal{H} . De plus, φ_ℓ est continue, car

$$|\overline{\ell(\varphi_x)}| = |\ell(\varphi_x)| \leq \|\ell\| \|\varphi_x\| = \|\ell\| \|x\|.$$

Il existe donc un unique vecteur $x_\ell \in \mathcal{H}$ tel que

$$\varphi_\ell(x) = \varphi_{x_\ell}(x) = \langle x|x_\ell \rangle \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

ou encore

$$\ell(\varphi_x) = \langle x_\ell|x \rangle = \varphi_x(x_\ell) \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

Ceci veut dire que $\ell = j(x_\ell)$.

• j est isométrique : soit $x \in \mathcal{H}$. Nous savons déjà que $\|j(x)\| \leq \|x\|$. Comme

$$|j(x)(\varphi_x)| = |\varphi_x(x)| = \langle x|x \rangle = \|x\|^2 = \|x\| \|\varphi_x\|,$$

On a donc $\|j(x)\| = \|x\|$ ■

Exemple 3.6.3 Pour $p \in]1, +\infty[$ et pour un espace mesurable (X, \mathcal{B}, μ) , l'espace $L^p(X, \mu)$ est réflexif. Nous ne le montrerons que pour les espaces ℓ^p .

En effet, soit $q \in]1, +\infty[$ tel que $1/p + 1/q = 1$. L'application

$$\ell^q \mapsto (\ell^p)', x \mapsto \varphi_x,$$

où $\varphi_x(y) = \sum_n x_n y_n$, est une bijection linéaire et isométrique (voir Exercice 3.9.11). Soit $f \in (\ell^p)''$; alors $x \mapsto f(\varphi_x)$ est dans $(\ell^q)'$. Il existe donc $y \in \ell^p$ tel que

$$f(\varphi_x) = \varphi_y(x) = \sum_n x_n y_n = \varphi_x(y) \quad \text{pour tout } x \in \ell^q.$$

Ceci veut dire que $f = j_y$.

3.7 Opérateurs sur les espaces de Hilbert

Soient \mathcal{H} et \mathcal{K} des espaces de Hilbert.

Définition 3.7.1 (Forme sesquilinéaire bornée) Une application

$$B : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{K}$$

est dite sesquilinéaire (bilinéaire quand $\mathbf{K} = \mathbf{R}$) si Φ est linéaire en la première variable et anti-linéaire (linéaire quand $\mathbf{K} = \mathbf{R}$) en la seconde. On dit que B est bornée si

$$\|B\| := \sup\{|B(x|y)| : (x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}, \|x\| = \|y\| = 1\} < +\infty :$$

Exemple 3.7.2 Tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ définit une application sesquilinéaire bornée $B_T : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{K}$ donnée par

$$B_T(x, y) = \langle x|Ty \rangle \quad x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K}.$$

On a $\|B\| \leq \|T\|$. En fait (voir Théorème suivant), on a $\|B_T\| = \|T\|$.

Le théorème suivant, qui est une conséquence du Théorème de Riesz, montre que toute application sesquilinéaire bornée est de cette forme.

Théorème 3.7.3 Soit $B : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{K}$ une application sesquilinéaire bornée. Alors il existe un unique $T \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ tel que $B = B_T$. De plus, on a

$$\|T\| = \|B\|.$$

Démonstration Fixons $y \in \mathcal{K}$. L'application $B_y : x \mapsto B(x, y)$ est une forme linéaire sur \mathcal{H} . De plus, B_y est continue, et

$$\|B_y\| \leq \|B\| \|y\|.$$

En effet, on a $|B(x, y)| \leq \|B\| \|y\|$ pour tout $x \in \mathcal{H}$ avec $\|x\| = 1$.

Par le Théorème de Riesz 3.3.2, il existe donc un unique élément dans \mathcal{H} , noté Ty , tel que $B(x, y) = \langle x | Ty \rangle$ pour tout $x \in \mathcal{H}$. On obtient ainsi une application $T : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$.

Montrons que T est linéaire. Soient $y, z \in \mathcal{K}$ et $\lambda, \beta \in \mathbf{K}$. Alors, pour tout $x \in \mathcal{H}$, on a

$$\begin{aligned} \langle x | T(\lambda y + \beta z) \rangle &= B(x, \lambda y + \beta z) \\ &= \bar{\lambda} B(x, y) + \bar{\beta} B(x, z) \\ &= \bar{\lambda} \langle x | Ty \rangle + \bar{\beta} \langle x | Tz \rangle \\ &= \langle x | \lambda Ty + \beta Tz \rangle. \end{aligned}$$

Ceci montre que

$$T(\lambda y + \beta z) - (\lambda Ty + \beta Tz) \in \mathcal{H}^\perp = \{0\}$$

et donc $T(\lambda y + \beta z) = \lambda Ty + \beta Tz$.

Montrons que T est continu. Par le théorème de Riesz, on a $\|B_y\| = \|Ty\|$. Comme $\|B_y\| \leq \|B\| \|y\|$, il s'ensuit que

$$\|Ty\| \leq \|B\| \|y\|,$$

et donc $\|T\| \leq \|B\|$.

Montrons maintenant que $\|T\| = \|B\|$. En effet, on a, pour tous $x \in \mathcal{H}$ et $y \in \mathcal{K}$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |B(x, y)| &= |\langle x | Ty \rangle| \leq \|x\| \|Ty\| \\ &\leq \|T\| \|x\| \|y\| \end{aligned}$$

Ceci montre que $\|B\| \leq \|T\|$. ■

Notons le corollaire utile suivant.

Corollaire 3.7.4 Soit $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ une application linéaire. Alors T est continue si seulement si

$$\sup\{\langle Tx|y \rangle : (x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}, \|x\| = \|y\| = 1\} < +\infty.$$

Dans ce cas, on a

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx|y \rangle| : (x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}, \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

Démonstration On considère l'application sesquilinéaire $B : \mathcal{K} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{K}$ donnée par

$$B(y, x) = \langle y|Tx \rangle \quad x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K}.$$

Ainsi $B = B_T$. Si T est continue, alors B est bornée et, par le Théorème 3.7.3, on a

$$\begin{aligned} \|T\| = \|B\| &= \sup\{|\langle y|Tx \rangle| : (x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}, \|x\| = \|y\| = 1\} \\ &= \sup\{|\langle Tx|y \rangle| : (x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}, \|x\| = \|y\| = 1\}. \end{aligned}$$

Si B est bornée, alors, toujours par le Théorème 3.7.3, T est continu ■

Théorème 3.7.5 (Ajoint d'un opérateur) Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Il existe un unique opérateur $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$, appelé l'opérateur adjoint de T , tel que

$$\langle Tx|y \rangle = \langle x|T^*y \rangle \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K}.$$

De plus, on a $\|T^*\| = \|T\|$.

Démonstration On considère l'application sesquilinéaire $B : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{K}$ donnée par

$$B(x, y) = \langle Tx|y \rangle \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K}.$$

Observons que B est bornée, car

$$|B(x, y)| \leq \|T\| \quad \text{pour tous } (x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}, \|x\| = \|y\| = 1.$$

Par le Théorème 3.7.3, il existe une application linéaire continue $T^* : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ telle que

$$\langle Tx|y \rangle = \langle x|T^*y \rangle \quad \text{pour tous } x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K}.$$

On a de plus

$$\|T^*\| = \sup\{|\langle Tx|y \rangle| : (x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}, \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

Avec le Corollaire 3.7.4, on a donc $\|T^*\| = \|T\|$ ■

Proposition 3.7.6 Soient $\mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathcal{L}$ des espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ et $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{L})$. Alors

- (i) $(T^*)^* = T$;
- (ii) $(ST)^* = T^*S^*$.
- (iii) $\|T^*T\| = \|T\|^2$;

Démonstration

(i) Comme

$$\langle x|T^*y \rangle = \langle Tx|y \rangle \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K},$$

on a $(T^*)^* = T$, par unicité de l'opérateur adjoint.

L'assertion (ii) découle de l'égalité

$$\langle x|STy \rangle = \langle S^*x|Ty \rangle = \langle T^*S^*x|Ty \rangle.$$

(iii) Soit $x \in \mathcal{H}$ avec $\|x\| = 1$. Alors, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \langle Tx|Tx \rangle = \langle T^*Tx|x \rangle \\ &\leq \|T^*T\|. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. D'autre part, comme $\|T^*\| = \|T\|$, on a

$$\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2. \blacksquare$$

Proposition 3.7.7 Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Alors

- (i) $\text{Ker}T = (T^*(\mathcal{K}))^\perp$;
- (ii) l'adhérence de $T(\mathcal{H})$ est $(\text{Ker}T^*)^\perp$.

Démonstration

(i) Soit $x \in \mathcal{H}$. On a $x \in \text{Ker}T$ si et seulement si $\langle Tx|y \rangle = 0$ pour tout $y \in \mathcal{K}$. Ceci a lieu si et seulement si $\langle x|T^*y \rangle = 0$ pour tout $y \in \mathcal{K}$, c-à-d si et seulement si $x \in (T^*(\mathcal{K}))^\perp$.

(ii) On a (voir Corollaire 3.2.6)

$$\overline{T(\mathcal{H})} = (T(\mathcal{H})^\perp)^\perp.$$

Da'utre part, en remplaçant T par T^* dans (i), on a $(T(\mathcal{H}))^\perp = \text{Ker}T^*$. L'assertion s'ensuit. \blacksquare

Exemple 3.7.8 (Opérateurs intégraux de Hilbert-Schmidt)

Soit (X, \mathcal{B}, μ) un espace mesuré (X peut, être, par exemple, un intervalle de \mathbf{R} et μ la mesure de Lebesgue). Soit $k : X \times X \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction mesurable et de carré intégrable par rapport à la mesure produit $\mu \otimes \mu$, c-à-d

$$\int_{X \times X} |k(x, y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) < \infty.$$

On a alors :

- (i) pour tout $f \in L^2(X, \mu)$ et pour μ -presque tout $x \in X$, la fonction $y \mapsto k(x, y)f(y)$ est intégrable;
- (ii) pour tout $f \in L^2(X, \mu)$, la fonction $Kf : x \mapsto \int_X k(x, y)f(y)d\mu(y)$ est dans $L^2(X, \mu)$;
- (iii) l'application $K : f \mapsto Kf$ est linéaire et continue de norme $\|K\| \leq \|k\|_{L^2(X \times X)}$. L'opérateur K est appelé *opérateur intégral de Hilbert-Schmidt de noyau k* .
- (iv) L'adjoint de K est l'opérateur intégral de Hilbert-Schmidt de noyau k^* , où $k^* \in L^2(X \times X)$ est défini par $k^*(x, y) = \overline{k(y, x)}$.

Démonstration (i) Par Fubini, on a

$$\int_{X \times X} |k(x, y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) = \int_X \left(\int_X |k(x, y)|^2 d\mu(y) \right) d\mu(x) < \infty,$$

et donc $\int_X |k(x, y)|^2 d\mu(y) < \infty$ pour μ -presque tout $x \in X$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a alors pour un tel $x \in X$,

$$\int_X |k(x, y)f(y)| d\mu(y) \leq \left(\int_X |k(x, y)|^2 d\mu(y) \right)^{1/2} \left(\int_X |f(y)|^2 d\mu(y) \right)^{1/2} < \infty.$$

Montrons (ii) et (iii). On a, par l'inégalité précédente

$$\begin{aligned} \int_X |Kf(x)|^2 d\mu(x) &= \int_X \left(\int_X |k(x, y)f(y)| d\mu(y) \right)^2 d\mu(x) \\ &\leq \int_X \left(\int_X |k(x, y)|^2 d\mu(y) \right) d\mu(x) \|f\|^2 \\ &= \|k\|_{L^2(X \times X)}^2 \|f\|^2. \end{aligned}$$

(iv) Pour tous $f, g \in L^2(X, \mu)$, on a, par Fubini,

$$\begin{aligned} \langle Kf|g \rangle &= \int_X \left(\int_X k(x, y) f(y) d\mu(y) \right) \overline{g(x)} d\mu(x) \\ &= \int_X \left(\int_X k(x, y) \overline{g(x)} d\mu(x) \right) f(y) d\mu(y) \\ &= \int_X \left(\int_X \overline{k(x, y)} g(x) d\mu(x) \right) f(y) d\mu(y) \\ &= \int_X f(x) \left(\int_X \overline{k(y, x)} g(y) d\mu(y) \right) d\mu(x). \end{aligned}$$

Ceci montre que $K^*g(x) = \int_X \overline{k(y, x)} g(y) d\mu(y)$ ■

Définition 3.7.9 (Opérateurs auto-adjoints, opérateurs unitaires) Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert. Un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est dit

normal si $T^*T = TT^*$;

auto-adjoint (ou *symétrique* dans le cas $\mathbf{K} = \mathbf{R}$) si $T^* = T$;

unitaire si $T^*T = TT^* = I_{\mathcal{H}}$;

positif si $T^* = T$ et $\langle Tx|x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathcal{H}$.

Proposition 3.7.10 Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(i) T^*T est positif.

(ii) T est normal si et seulement si $\|Tx\| = \|T^*x\|$ pour tout $x \in \mathcal{H}$.

(iii) Si T est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé \mathcal{K} , alors T est positif.

Démonstration

(i) On a $(T^*T)^* = T^*(T^*)^* = T^*T$. D'autre part, pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$\langle T^*Tx|x \rangle = \langle Tx|Tx \rangle = \|Tx\|^2 \geq 0$$

(ii) Supposons que T est normal et soit $x \in \mathcal{H}$. Alors

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \langle Tx|Tx \rangle = \langle T^*Tx|x \rangle \\ &= \langle TT^*x|x \rangle = \langle T^*x|T^*x \rangle = \|T^*x\|^2. \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que $\|Tx\| = \|T^*x\|$ pour tout $x \in \mathcal{H}$. Alors,

$$\langle T^*Tx|x \rangle = \langle TT^*x|x \rangle$$

pour tout $x \in \mathcal{H}$.

On considère la forme sesquilinéaire $\varphi : (x, y) \mapsto \langle (T^*T - TT^*)x | y \rangle$ sur \mathcal{H} . Comme T^*T est TT^* sont auto-adjoints, φ est hermitienne (ou symétrique quand $\mathbf{K} = \mathbf{R}$). Ce qui précède montre que $\varphi(x, x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{H}$. Par l'identité de polarisation (Proposition 3.1.8), on a donc $\varphi(x, y) = 0$ pour tous $x, y \in \mathcal{H}$. Ceci signifie que $(T^*T - TT^*)x \in \mathcal{H}^\perp = \{0\}$ pour tout $x \in \mathcal{H}$ et donc $T^*T = TT^*$.

(iii) Soit T une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé \mathcal{K} . Pour $x, x' \in \mathcal{K}$ et $y, y' \in \mathcal{K}^\perp$, on a

$$\langle P(x + y) | x' + y' \rangle = \langle x | x' \rangle = \langle x + y | P(x' + y') \rangle$$

et donc $P = P^*$. De plus, on a

$$\langle P(x + y) | x + y \rangle = \langle x | x \rangle \geq 0.$$

Donc P est positif. ■

On rappelle (Corollaire 3.7.4) que, pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, on a

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx | y \rangle| : (x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}, \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

Dans le cas où T est autoadjoint, on a la formule plus précise suivante.

Proposition 3.7.11 *Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint. Alors*

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx | x \rangle| : \|x\| = 1\}.$$

Démonstration Soit

$$C = \sup\{|\langle Tx | x \rangle| : \|x\| = 1\}.$$

On a clairement $C \leq \|T\|$ et il s'agit de montrer que $\|T\| \leq C$.

Comme $T = T^*$, la forme sesquilinéaire $\varphi : (x, y) \mapsto \langle Tx | y \rangle$ sur \mathcal{H} est hermitienne (ou symétrique quand $\mathbf{K} = \mathbf{R}$). On a donc

$$\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y) = 4\operatorname{Re}(\varphi(x, y)) \quad \text{pour tous } x, y \in \mathcal{H}.$$

D'autre part, on a $\varphi(x, x) \leq C\|x\|^2$ pour tout $x \in \mathcal{H}$. D'où

$$4\operatorname{Re}(\varphi(x, y)) \leq C(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2) \quad \text{pour tous } x, y \in \mathcal{H}.$$

Soient $x, y \in \mathcal{H}$ avec $\|x\| = \|y\| = 1$. On a donc, par le lemme de la médiane (Proposition 3.1.12),

$$4\operatorname{Re}(\varphi(x, y)) \leq 2C(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4C$$

Soit $u \in \mathbf{C}$ avec $|u| = 1$ et tel que $\varphi(x, y) = u|\varphi(x, y)|$. On a alors, en remplaçant dans ce qui précède y par uy (en remarquant que $\|uy\| = 1$),

$$\begin{aligned} |\varphi(x, y)| &= \operatorname{Re}|\varphi(x, y)| = \operatorname{Re}(\bar{u}\varphi(x, y)) \\ &= \operatorname{Re}(\varphi(x, uy)) \leq C \blacksquare \end{aligned}$$

3.8 Opérateurs compacts

On supposera dans toute cette section que \mathcal{H} un espace de Hilbert *séparable*. Soit

$$B = \overline{B}(0, 1) = \{x \in \mathcal{H} : \|x\| \leq 1\},$$

la boule-unité fermée de \mathcal{H} . Rappelons que B est compact si et seulement si \mathcal{H} est de dimension finie (Théorème de Riesz 3.3.2).

Définition 3.8.1 (Opérateurs compacts) Un opérateur $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est dit *compact* si l'adhérence $\overline{T(B)}$ de l'image de B par T est une partie compacte de \mathcal{H} . On note $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs compacts $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$.

Donnons un critère pratique pour montrer qu'un opérateur est compact

Proposition 3.8.2 *Les propriétés suivantes sont équivalentes pour une application linéaire $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$.*

- (i) T est compact;
- (ii) toute suite bornée $(x_n)_n$ dans \mathcal{H} possède une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que $(Tx_{n_k})_k$ soit convergente;
- (iii) toute suite $(x_n)_n$ dans B possède une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que $(Tx_{n_k})_k$ soit convergente.

Démonstration Supposons que T est compact et soit $(x_n)_n$ une suite bornée dans \mathcal{H} . Alors $(x_n)_n$ est contenue dans une boule (fermée) $\overline{B}(0, r)$. On a $\overline{B}(0, r) = rB$ et donc $T(\overline{B}(0, r)) = rT(B)$. Comme $x \mapsto rx$ est un homéomorphisme de \mathcal{H} , il s'ensuit que l'adhérence de $T(\overline{B}(0, r))$ est compacte. Donc $(x_n)_n$ dans \mathcal{H} possède une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que $(Tx_{n_k})_k$ est

convergente. Ceci montre que (i) implique (ii). Il est évident que (ii) implique (iii).

Montrons que (iii) implique (i). Soit $(y_n)_n$ une suite dans $\overline{T(B)}$. Pour tout n , il existe $x_n \in B$ tel que $\|y_n - Tx_n\| \leq 1/n$ (car y_n est dans l'adhérence de $T(B)$). La suite $(x_n)_n$ possède par hypothèse une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que $(Tx_{n_k})_k$ est convergente vers un élément $y \in \mathcal{H}$ qui est évidemment dans $\overline{T(B)}$. Comme $\|y_{n_k} - Tx_{n_k}\| \leq 1/n_k$, la sous-suite $(y_{n_k})_k$ converge vers y . Ceci montre que l'adhérence $\overline{T(B)}$ de $T(B)$ est compacte ■

Remarque 3.8.3 (i) Soit $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Alors T est continue (c-à-d $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$). En effet, $\overline{T(B)}$, étant compact, est bornée et ceci signifie que $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(ii) Supposons que $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est de rang fini, c-à-d l'image $T(\mathcal{H})$ de T est de dimension finie. Alors $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. En effet, comme $T(\mathcal{H})$ est de dimension finie, $T(\mathcal{H})$ est fermée dans \mathcal{H} (Corollaire 2.4.2); $\overline{T(B)}$ est donc une partie bornée et fermée et, par conséquent, compacte de $T(\mathcal{H})$.

(iii) L'opérateur $I_{\mathcal{H}}$ est compact si et seulement si \mathcal{H} est de dimension finie. Ceci découle immédiatement du Théorème de Riesz 3.3.2.

(iv) $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(v) $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ est un idéal bilatère de l'algèbre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: pour tous $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ et $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, on a $TS \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ et $ST \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. En effet, ceci découle immédiatement de la Proposition 3.8.2.

Notons $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ l'idéal bilatère de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ formé des opérateurs de rang fini. Rappelons que $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Proposition 3.8.4 On munit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de la norme d'opérateurs.

(i) $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ est fermée dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(ii) $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ est dense dans $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

(i) Si $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, alors $T^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Démonstration (i) Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et $(T_n)_n$ une suite dans $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ avec $\lim_n \|T_n - T\| = 0$.

Soit $(x_k)_k$ une suite dans B . Comme T_0 est compact, il existe une sous-suite $(x_k^{(0)})_k$ de $(x_k)_k$ telle que $(T_0 x_k^{(0)})_k$ est convergente.

Comme T_1 est compact, il existe une sous-suite $(x_k^{(1)})_k$ de $(x_k^{(0)})_k$ telle que $(T_1 x_k^{(1)})_k$ est convergente. En continuant de la sorte, on construit par récurrence, pour tout $m \geq 1$, une sous-suite de $(x_k^{(m)})_k$ de $(x_k^{(m-1)})_k$ telle que $(T_m x_k^{(m)})_k$ est convergente.

Posons $y_k = x_k^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Alors $(y_k)_k$ est une sous-suite de $(x_k)_k$. Il suffit de montrer que $(T(y_k))_k$ est une suite de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_n \|T_n - T\| = 0$, il existe N tel que

$$\|T_n - T\| \leq \varepsilon/3 \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

D'autre part, $(y_k)_{k \geq N}$ est une sous-suite de $(x_k^{(N)})_k$ et $(T_N(x_k^{(N)}))_k$ est convergente. Il existe donc $K \geq N$ tel que

$$\|T_N(y_k) - T_N(y_l)\| \leq \varepsilon/3 \quad \text{pour tous } k, l \geq K.$$

On a alors, pour tous $k, l \geq N$,

$$\begin{aligned} \|T(y_k) - T(y_l)\| &\leq \\ \|T(y_k) - T_N(y_k)\| + \|T_N(y_k) - T_N(y_l)\| + \|T_N(y_l) - T(y_l)\| & \\ &\leq 2\|T - T_N\| + \|T_N(y_k) - T_N(y_l)\| \leq 3\varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) Soit $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Soit $(e_k)_k$ une base hilbertienne de \mathcal{H} .

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $\mathcal{H}_n = \text{Vect}\{e_k : k \leq n\}$. On observera que \mathcal{H}_n est de dimension finie et est donc fermé dans \mathcal{H} . Soit $P_n : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_n$ la projection orthogonale sur \mathcal{H}_n . On a $P_n T \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$. On va montrer que $\lim_n P_n T = T$.

Soit $Q_n = I - P_n$. Alors Q_n est la projection orthogonale sur \mathcal{H}_n^\perp qui est l'adhérence de l'espace $\text{Vect}\{e_k : k > n\}$. Comme $P_n T - T = Q_n T$, il faut montrer que $\lim_n \|Q_n T\| = 0$. Comme la suite $(\|Q_n T\|)_n$ est décroissante, il suffit donc de montrer que

$$\inf\{\|Q_n T\| : n \in \mathbf{N}\} = 0.$$

On observera d'abord que, pour tout $x \in \mathcal{H}$, on a $\lim_n Q_n x = 0$. En effet, on a

$$\|Q_n x\|^2 = \sum_{k > n} |\langle x | e_k \rangle|^2$$

et $\sum_{k \in \mathbf{N}} |\langle x | e_k \rangle|^2$ est une série convergente de somme $\|x\|^2$ (égalité de Parseval Théorème 3.5.3). Ceci implique que $\lim_n Q_n T x = 0$ pour tout $x \in \mathcal{H}$.

Supposons, par l'absurde, que

$$c = \inf\{\|Q_n T\| : n \in \mathbf{N}\} > 0.$$

Pour tout n , on peut alors trouver $x_n \in B$ tel que $\|Q_n T x_n\| \geq c/2$. Comme T est compact, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ telle que $(T(x_{n_k}))_k$

converge. Notons $y = \lim_k T(x_{n_k})$. Soit K tel que $\|y - T(x_{n_k})\| \leq c/4$ pour tout $k \geq K$. On a alors

$$\begin{aligned} \|Q_{n_k}(y)\| &= \|Q_{n_k}(y - T(x_{n_k})) + Q_{n_k}T(x_{n_k})\| \\ &\geq \|Q_{n_k}T(x_{n_k})\| - \|Q_{n_k}(y - T(x_{n_k}))\| \geq c/4. \end{aligned}$$

pour tout $k \geq K$. D'autre part, comme mentionné plus haut, on a $\lim_k \|Q_{n_k}(y)\| = 0$. Ceci est une contradiction.

(iii) Avec les notations précédentes, on a $\lim_n \|P_n T - T\| = 0$. D'où

$$\lim_n \|T^* P_n - T^*\| = \lim_n \|P_n T - T\| = 0.$$

Comme $T^* P_n \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$, on a donc, par (i), $T^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ ■

Exemple 3.8.5 (Opérateurs intégraux de Hilbert-Schmidt) Reprenons l'exemple 3.7.8. Soit (X, \mathcal{B}, μ) un espace mesuré et $k \in L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$. On suppose que μ est σ -finie (c-à-d qu'il existe une suite de parties $X_n \in \mathcal{B}$ telles que $\mu(A_n) < \infty$ et $X = \cup_n A_n$; cette condition est satisfaite, par exemple, si X est un ouvert de \mathbf{R}^k muni de la mesure de Lebesgue). Soit $K \in \mathcal{B}(L^2(X, \mu))$ l'opérateur intégral associé :

$$Kf(x) = \int_X k(x, y)f(y)d\mu(y) \quad \text{pour tous } f \in L^2(X, \mu), x \in X.$$

Alors K est un opérateur compact. Pour le prouver, fixons une base hilbertienne $(f_n)_n$ de $L^2(X, \mu)$. Pour tout $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, soit $f_m \otimes f_n \in L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$ définie par $f_m \otimes f_n(x, y) = f_m(x)f_n(y)$. Alors $(f_m \otimes f_n)_{(m,n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$ (voir Exercice 3.9.17).

Pour tout $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, soit

$$a_{m,n} = \langle k | f_m \otimes f_n \rangle,$$

de sorte que (égalité de Parseval)

$$k = \sum_{m,n} a_{m,n} f_m \otimes f_n,$$

Pour tout $N \in \mathbf{N}$ définissons $k_N \in L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$ par

$$k_N = \sum_{m,n=1}^N a_{m,n} f_m \otimes f_n \quad \text{pour tous } x, y \in X.$$

Observons que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|k - k_N\|_{L^2(X \times X)} = 0.$$

Soit $K_N : L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu)$ l'opérateur intégral associé à k_N :

$$K_N f(x) = \int_X k_N(x, y) f(y) d\mu(y) \quad \text{pour tous } f \in L^2(X, \mu), x \in X.$$

On a donc

$$K_N f = \sum_m^N \left(\sum_{n=0}^N a_{m,n} \int_X f_n(y) f(y) d\mu(y) \right) f_m \quad \text{pour tous } f \in L^2(X, \mu).$$

Ceci montre que l'image de K_N est contenue dans $\text{Vect}\{f_m : m \leq N\}$. Donc K_N est de rang fini. D'autre part, on a (voir Exemple 3.7.8)

$$\|K_N - K\| \leq \|k_N - k\|_{L^2(X \times X)}.$$

et donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|K - k_N\| = 0.$$

Le (ii) du Théorème 3.8.4 montre alors que T est compact.

Le théorème suivant est le résultat principal concernant la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts. C'est une généralisation en dimension infinie du théorème de diagonalisation des matrices hermitiennes.

Soit $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur ; un nombre $\lambda \in \mathbf{C}$ est une valeur propre de T si $\text{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\}$. Un élément non nul $x \in \text{Ker}(T - \lambda I)$ est un vecteur propre de T pour la valeur propre λ . Le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(T - \lambda I)$ est l'espace propre associé à la valeur propre λ .

Théorème 3.8.6 (Opérateurs compacts : théorème spectral) Soit T un opérateur compact et auto-adjoint sur \mathcal{H} . Alors

- \mathcal{H} possède une base hilbertienne $(e_n)_n$ formée de vecteurs propres de T ;
- toute valeur propre de T est réelle ;
- quand \mathcal{H} est de dimension infinie, l'ensemble des valeurs propres de T est une suite infinie $(\lambda_n)_n$ avec $\lim_n \lambda_n = 0$.

La preuve reposera sur trois lemmes préliminaires.

Lemme 3.8.7 Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint.

- (i) On a $\langle Tx|x \rangle \in \mathbf{R}$ pour tout $x \in \mathcal{H}$.
- (ii) Soit \mathcal{K} un sous-espace vectoriel de \mathcal{H} invariant par T (c-à-d $Tx \in \mathcal{K}$ pour tout $x \in \mathcal{K}$). Alors \mathcal{K}^\perp est invariant par T .
- (iii) Toute valeur propre de T est réelle.
- (iv) Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes. Alors les espaces propres $\text{Ker}(T - \lambda_1 I)$ et $\text{Ker}(T - \lambda_2 I)$ sont orthogonaux.

Démonstration (i) Ceci découle de

$$\langle Tx|x \rangle = \langle x|T^*x \rangle = \langle x|Tx \rangle = \overline{\langle Tx|x \rangle}.$$

(ii) Soit $x \in \mathcal{K}^\perp$. Alors, pour tout $y \in \mathcal{K}$, on a

$$\langle Tx|y \rangle = \langle x|T^*y \rangle = \langle x|Ty \rangle = 0,$$

car $T^* = T$ et $Ty \in \mathcal{K}$. Donc $Tx \in \mathcal{K}^\perp$.

(iii) Soit λ une valeur propre de T et $x \in \text{Ker}(T - \lambda I)$, $x \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} \lambda \langle x|x \rangle &= \langle Tx|x \rangle = \langle x|Tx \rangle \\ &= \langle x|\lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle x|x \rangle \end{aligned}$$

et donc $\lambda = \bar{\lambda}$.

(iii) Soient $x_1 \in \text{Ker}(T - \lambda_1 I)$ et $x_2 \in \text{Ker}(T - \lambda_2 I)$. Alors

$$\begin{aligned} \lambda_1 \langle x_1|x_2 \rangle &= \langle Tx_1|x_2 \rangle = \langle x_1|Tx_2 \rangle \\ &= \langle x_1|\lambda_2 x_2 \rangle = \bar{\lambda}_2 \langle x_1|x_2 \rangle \\ &= \lambda_2 \langle x_1|x_2 \rangle, \end{aligned}$$

car $\lambda_2 \in \mathbf{R}$ par (ii). Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ceci implique que $\langle x_1|x_2 \rangle = 0$. ■

Lemme 3.8.8 Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur compact et auto-adjoint.

- (i) Soit λ une valeur propre de T avec $\lambda \neq 0$. Alors $\text{Ker}(T - \lambda I)$ est de dimension finie.
- (ii) Soit $\varepsilon > 0$. Alors il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres λ de T avec $|\lambda| \geq \varepsilon$.

Démonstration (i) Supposons, par l'absurde, que $\text{Ker}(T - \lambda I)$ est de dimension infinie. Il existe alors une suite orthonormée infinie $(x_n)_n$ dans $\text{Ker}(T - \lambda I)$. Comme T est compact, $(x_n)_n$ possède une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que $(T(x_{n_k}))_k$ soit convergente. D'autre part, pour tout k , on a $T(x_{n_k}) = \lambda x_{n_k}$. Comme $\lambda \neq 0$, il s'ensuit que la suite $(x_{n_k})_k$ est convergente. Ceci est absurde, car $\|x_n - x_m\|^2 = 2$ pour tout $n \neq m$.

(ii) Supposons, par l'absurde, qu'il existe une suite infinie $(\lambda_n)_n$ avec $|\lambda_n| \geq \varepsilon$. Par le Lemme 3.8.7, les espaces $\text{Ker}(T - \lambda_n I)$ sont deux-à-deux orthogonaux. On peut donc choisir une suite orthonormée infinie $(x_n)_n$ avec $x_n \in \text{Ker}(T - \lambda_n I)$. Comme plus haut, $(x_n)_n$ possède une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que $(T(x_{n_k}))_k$ soit convergente.

Pour tout $k \neq l$, on a $\langle x_{n_k} | x_{n_l} \rangle = 0$ et donc

$$\begin{aligned} \|T(x_{n_k}) - T(x_{n_l})\|^2 &= \|\lambda_{n_k} x_{n_k} - \lambda_{n_l} x_{n_l}\|^2 \\ &= \lambda_{n_k}^2 + \lambda_{n_l}^2 \geq 2\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Ceci est absurde car $(T(x_{n_k}))_k$ est convergente. ■

Lemme 3.8.9 Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur compact et auto-adjoint. Alors $\|T\|$ ou $-\|T\|$ est une valeur propre de T .

Démonstration On peut supposer que $T \neq 0$. Par la Proposition 3.7.11, on a

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx|x \rangle| : \|x\| = 1\}.$$

Comme $T = T^*$, on a $\langle Tx|x \rangle \in \mathbf{R}$ pour tout $x \in \mathcal{H}$ (Lemme 3.8.7.i). Il existe donc une suite $(x_n)_n$ avec $\|x_n\| = 1$ telle que $\lim_n \langle Tx_n|x_n \rangle = \lambda$, où $\lambda = \|T\|$ ou bien $\lambda = -\|T\|$.

Comme T est compact, quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que $\lim_n Tx_n = y$ pour un $y \in \mathcal{H}$. On a $y \neq 0$. En effet, sinon, comme

$$|\langle Tx_n|x_n \rangle| \leq \|Tx_n\|,$$

on aurait $\lambda = 0$, ce qui est absurde car $T \neq 0$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|Tx_n - \lambda x_n\|^2 &= \|Tx_n\|^2 - 2\lambda \langle Tx_n|x_n \rangle + \lambda^2 \|x_n\|^2 \\ &= \|Tx_n\|^2 - 2\lambda \langle Tx_n|x_n \rangle + \|T\|^2 \\ &\leq 2(\|T\|^2 - \lambda \langle Tx_n|x_n \rangle). \end{aligned}$$

Comme $\lim_n \langle Tx_n | x_n \rangle = \lambda$, il s'ensuit que $\lim_n \|Tx_n - \lambda x_n\| = 0$. Comme $\lim_n Tx_n = y$, on a donc $\lim_n \lambda x_n = y$. Par conséquent, on a $\lim_n \lambda Tx_n = Ty$. Mais, comme $\lim_n Tx_n = y$, on en déduit que $Ty = \lambda y$. Donc y est un vecteur propre de T pour la valeur propre λ ■

Preuve du Théorème 3.8.6

Soit \mathcal{K} le sous-espace vectoriel fermé engendré par tous les espaces propres de T . D'après les lemmes 3.8.7 et 3.8.8 précédents, il suffit de montrer que $\mathcal{K} = \mathcal{H}$.

Supposons par l'absurde que $\mathcal{K} \neq \mathcal{H}$. Alors $\mathcal{K}^\perp \neq 0$. Comme $T(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$, on a $T(\mathcal{K}^\perp) \subset \mathcal{K}^\perp$ (voir Lemme 3.8.7.ii). Soit S la restriction de T à l'espace de Hilbert \mathcal{K}^\perp . Alors S est un opérateur compact et auto-adjoint dans $\mathcal{B}(\mathcal{K}^\perp)$. Par le Lemme 3.8.9, S possède donc un vecteur propre x dans \mathcal{K}^\perp . Alors x est un vecteur propre de T . Ceci est absurde, car $x \notin \mathcal{K}$. ■

3.9 Exercices

Exercice 3.9.1 (Caractérisation normique des espaces de Hilbert)

Soient E un espace vectoriel réel et $f : E \rightarrow \mathbf{R}_+$ telle que

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \quad \text{pour tous } x, y \in E.$$

- (i) Montrer que $f(0) = 0$ et que $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in E$.
- (ii) Montrer que $f(kx) = k^2 f(x)$ pour tout $k \in \mathbf{Q}$ et $x \in E$.
- (iii) Montrer que

$$f(x+y+z) = f(x+y) + f(x+z) + f(y+z) - f(x) - f(y) - f(z) \quad \text{pour tous } x, y, z \in E.$$

- (iv) Montrer que l'application $(x, y) \mapsto f(x+y) - f(x) - f(y)$ est \mathbf{Q} -bilinéaire.
- (v) Soit $x \mapsto \|x\|$ une norme sur E telle que

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \text{pour tous } x, y \in E.$$

Montrer qu'il existe un produit scalaire sur E dont la norme associée est $x \mapsto \|x\|$.

Exercice 3.9.2 (Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $x, y \in E$ tels $|\langle x | y \rangle| = \|x\| \|y\|$. Montrer que x et y sont colinéaires.

Exercice 3.9.3 Soit E un espace préhilbertien et soit C une partie non vide, convexe et *complète* de E . Soit $x \in \mathcal{H}$. Montrer qu'il existe un unique $y_0 \in C$ tel que

$$\|x - y_0\| = \min\{\|x - y\| \mid y \in C\}.$$

Exercice 3.9.4 Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert et C une partie non vide, convexe et fermée de \mathcal{H} . On note $P_C : \mathcal{H} \rightarrow C$ l'application qui à $x \in \mathcal{H}$ associe l'unique $y_0 \in C$ tel que

$$\|x - y_0\| = \min\{\|x - y\| \mid y \in C\}.$$

Montrer que $\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\|$, pour tous $x, y \in \mathcal{H}$.

Exercice 3.9.5 Soient E un espace préhilbertien, C une partie de E et $x \in E$. Soit $y_0 \in C$ tel que

$$\operatorname{Re}\langle x - y_0 \mid y - y_0 \rangle \leq 0 \quad \text{pour tout } y \in C.$$

Montrer que

$$\|x - y_0\| = \min\{\|x - y\| \mid y \in C\}.$$

Exercice 3.9.6 Soient E un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$. Montrer qu'il existe $y_0 \in F$ tel que

$$\operatorname{Re}\langle x - y_0 \mid y - y_0 \rangle \leq 0 \quad \text{pour tout } y \in F.$$

Montrer, par un exemple, que y_0 n'est pas nécessairement unique.

Exercice 3.9.7 (Espace de Hardy) Soit $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ le disque-unité, muni de la mesure de Lebesgue $d\lambda(z) = dx dy$. Soit $\mathcal{H}^2(D)$ l'espace vectoriel complexe des fonctions holomorphes $f : D \rightarrow \mathbf{C}$ telles que

$$\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt < \infty.$$

(i) Montrer que l'application

$$f \mapsto \|f\| := \left(\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt \right)^{1/2}$$

est une norme sur $\mathcal{H}^2(D)$.

Soit $f \in \mathcal{H}^2(D)$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ son développement en série entière.
(ii) Montrer que, pour tout $0 \leq r < 1$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

(iii) Montrer que $\|f\| = (\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2)^{1/2}$.
(iv) Montrer que l'application $(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle$ définie par

$$\langle f|g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n$$

pour $f, g \in \mathcal{H}^2(D)$ avec $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ est un produit scalaire sur $\mathcal{H}^2(D)$ tel que $\|f\|^2 = \langle f|f \rangle$.

(v) Montrer que $\mathcal{H}^2(D)$ est un espace de Hilbert.

Exercice 3.9.8 Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que E est séparable si et seulement s'il possède une partie totale dénombrable et dense.

Exercice 3.9.9 Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ tel que

$$\langle Tx|x \rangle \geq c\|x\|^2 \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{H}.$$

- (i) Montrer que $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in \mathcal{H}$.
- (ii) Dédire de (i) que l'image $\text{Im}(T)$ de T est un sous-espace complet de \mathcal{H} .
- (iii) Montrer que $\text{Im}(T)$ est fermé dans \mathcal{H} .
- (iv) Montrer que $\text{Im}(T)^\perp = \{0\}$.
- (v) Dédire de (iii) et (iv) que T est surjective.
- (vi) Montrer que T est bijective et que T^{-1} est continue.

Exercice 3.9.10 On considère $C_{\mathbf{R}}[0, 1]$ muni du produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Soit F le sous-espace vectoriel de $C[0, 1]$ formé des fonctions f telles que $\int_{1/2}^1 f(t)dt = 0$.

- (i) Montrer que F n'est pas dense dans $C[0, 1]$
- (ii) Montrer que $F^\perp = \{0\}$.

Exercice 3.9.11 (Dualité dans les espaces ℓ^p) Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $1/p + 1/q = 1$.

Pour $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^p$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^q$, on pose $\varphi_x(y) = \sum_{n \in \mathbf{N}} x_n y_n$.
 (i) Soit $x \in \ell^p$. Montrer que φ_x est bien définie et que φ_x est une forme linéaire continue sur ℓ^q de norme $\|\varphi_x\| = \|x\|_p$.

Indication : On pourra utiliser l'Exercice 2.8.22.

(ii) Montrer que l'application linéaire

$$\varphi : \ell^p \mapsto (\ell^q)', \quad x \mapsto \varphi_x$$

est une isométrie.

(iii) Soit c l'espace vectoriel des suites $(x_n)_n$ de support fini à coefficients dans \mathbf{K} . (On observera que $c \subset \ell^q$ pour tout $q \in [1, +\infty]$.) Soit $f : c \rightarrow \mathbf{K}$ une forme linéaire. Montrer qu'il existe une unique suite $x = (x_n)_n$ d'éléments de \mathbf{K} telle

$$f(y) = \sum_{n \in \mathbf{N}} x_n y_n \quad \text{pour tout } y = (y_n)_n \in c.$$

(iv) Soit $F : \ell^q \rightarrow \mathbf{K}$ une forme linéaire continue sur ℓ^q . Soit $f = F|_c$ sa restriction à c et soit x la suite qui lui est associée en (ii). Montrer que $x \in \ell^p$.

(v) On suppose que $p \neq 1$. Montrer que l'application linéaire et isométrique

$$\varphi : \ell^p \mapsto (\ell^q)', \quad x \mapsto \varphi_x$$

est une bijection.

Indication : Utiliser l'Exercice 2.8.26.

Exercice 3.9.12 (Polynômes de Legendre) On considère la famille des monômes $D = \{p_n : t \mapsto t^n : n \in \mathbf{N}\}$ dans $L^2[-1, 1]$.

(i) Montrer que D est totale.

Indication : Montrer d'abord que D est totale dans $C[-1, 1]$, en utilisant le théorème de Weierstrass.

Pour $n \in \mathbf{N}$, soit

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} ((x^2 - 1)^n)$$

le n -ième polynôme de Legendre.

(ii) Calculer P_0, P_1, P_2 .

(iii) Montrer que $\langle P_n | p_m \rangle = 0$ pour tout $m < n$.

(iv) On pose $e_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n$. Montrer que $\{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ est une base hilbertienne de $L^2[-1, 1]$.

(v) Pour quels nombres réels a, b, c l'intégrale

$$I = \int_{-1}^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx.$$

est-elle minimale ?

Exercice 3.9.13 Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et $y \in T(\mathcal{H})$.

(i) Montrer que $\mathcal{C} = \{x \in \mathcal{H} : T(x) = y\}$ est une partie fermée, convexe et non vide de \mathcal{H} .

(ii) Montrer qu'il existe un unique vecteur $S(y) \in \mathcal{C}$ tel que $\|S(y)\| \leq \|z\|$ pour tout $z \in \mathcal{C}$.

(iii) Montrer que $S(y) \in (\text{Ker}T)^\perp$.

(iv) Montrer que l'application $S : T(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H}, y \mapsto S(y)$ est linéaire.

Indication : pour $y_1, y_2 \in T(\mathcal{H})$ et $\lambda, \beta \in \mathbf{K}$, montrer que $S(\lambda y_1 + \beta y_2) - (\lambda S(y_1) + \beta S(y_2)) \in \text{Ker}T$.

Exercice 3.9.14 (Un espace de Hilbert de fonctions analytiques) Soit $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ le disque-unité, muni de la mesure de Lebesgue $d\lambda(z) = dx dy$. Soit $A^2(D)$ l'espace vectoriel complexe des fonctions holomorphes $f : D \rightarrow \mathbf{C}$ telles que

$$\int_D |f(z)|^2 d\lambda(z) < \infty.$$

Pour $f, g \in A^2(D)$, on pose

$$\langle f|g \rangle = \int_D f(z) \overline{g(z)} d\lambda(z).$$

(i) Montrer que $(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle$ est un produit scalaire sur $A^2(D)$.

Pour $n \in \mathbf{N}$, soit $f_n : D \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$f_n(z) = \left(\frac{n+1}{\pi}\right)^{1/2} z^n.$$

(ii) Montrer que $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$ est une famille orthonormée dans $A^2(D)$.

(iii) Soit $w \in D$ et soit $r > 0$ tel que $B(w, r) \subset D$. Montrer que, pour tout $f \in A^2(D)$, on a

$$f(w) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(w,r)} f(z) d\lambda(z).$$

(iv) Pour $w \in D$, soit

$$\varphi_w : A^2(D) \rightarrow \mathbf{C}, \quad f \mapsto f(w).$$

Soit $r > 0$ tel que $B(w, r) \subset D$. Montrer que φ_w est une forme linéaire continue sur $A^2(D)$ et que

$$\|\varphi_w\| \leq \frac{1}{r\sqrt{\pi}}.$$

(v) Soit $(g_n)_n$ une suite de Cauchy dans $A^2(D)$. Montrer que $(g_n)_n$ converge, uniformément sur tout compact $K \subset D$, vers une fonction $g : D \rightarrow \mathbf{C}$.

(v) Montrer que $A^2(D)$ est complet

Indication : On admettra le théorème de Weierstrass : si une suite $(g_n)_n$ de fonctions holomorphes sur D converge uniformément sur tout compact $K \subset D$ vers une fonction $g : D \rightarrow \mathbf{C}$, alors g est holomorphe sur D .

(v) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une base hilbertienne de $A^2(D)$.

Exercice 3.9.15 (Un théorème ergodique) Soient \mathcal{H} une espace de Hilbert et $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ avec $\|T\| \leq 1$. On note

$$\mathcal{H}^T = \text{Ker}(T - I) = \{x \in \mathcal{H} \mid Tx = x\},$$

le sous-espace fermé formé des points fixes de T .

(i) Montrer que $\mathcal{H}^T = \mathcal{H}^{T^*}$.

Indication : Pour $x \in \mathcal{H}^T$, considérer le produit scalaire $\langle T^*x | x \rangle$.

Pour $N \in \mathbf{N}^*$, on pose (avec la convention $T^0 = I$,

$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T^n.$$

(ii) Calculer $S_N(x)$ pour $x \in \mathcal{H}^T$.

(iii) Soit $x \in (T - I)(\mathcal{H})$. Montrer que la suite $(S_N(x))_{N \in \mathbf{N}^*}$ converge vers 0.

(iv) Soit $x \in (\text{Ker}(T^* - I))^\perp$. Montrer que la suite $(S_N(x))_{N \in \mathbf{N}^*}$ converge vers 0.

Soit $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^T$ la projection orthogonale sur \mathcal{H}^T .

(v) Montrer que $\lim_N S_N(x) = Px$ pour tout $x \in \mathcal{H}$.

Exercice 3.9.16 (Opérateurs de Hilbert-Schmidt) Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Soit $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une base hilbertienne de \mathcal{H} . On note $HS(\mathcal{H})$ l'espace vectoriel formé des $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ telles que la série de terme général $\|Te_n\|^2$ est convergente.

Soit $T \in HS(\mathcal{H})$.

(i) Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une autre base hilbertienne de \mathcal{H} . Montrer que la série de terme général $\|T^*f_n\|^2$ est convergente et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|T^*f_n\|^2.$$

(ii) En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|Tf_n\|^2.$$

On définit

$$\|T\|_2 := \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 \right)^{1/2}$$

(iii) Montrer que $T \mapsto \|T\|_2$ est une norme sur $HS(\mathcal{H})$.

(iv) Montrer que $\|T\| \leq \|T\|_2$ pour tout $T \in HS(\mathcal{H})$.

(v) Montrer que $HS(\mathcal{H}) \neq \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(vi) Montrer que $HS(\mathcal{H})$ est un idéal bilatère de l'algèbre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Exercice 3.9.17 Soit X un intervalle de \mathbf{R} muni de la mesure de Lebesgue μ . Soit $(f_n)_n$ une base hilbertienne $L^2(X, \mu)$. Pour tout $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, on définit $f_m \otimes f_n : X \times X \rightarrow \mathbf{C}$ par $f_m \otimes f_n(x, y) = f_m(x)f_n(y)$ pour $(x, y) \in X \times X$.

(i) Montrer que $(f_m \otimes f_n)_{(m,n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}}$ est une famille orthonormée dans l'espace de Hilbert $L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$.

(ii) Montrer que $(f_m \otimes f_n)_{(m,n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}}$ est une base Hilbertienne de $L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$.

Indication : Soit $F \in L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$ tel que $\langle F | f_m \otimes f_n \rangle = 0$ pour tout $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Considérer, pour tout n , la fonction sur X définie par $F_n(x) = \int_X F(x, y) \overline{f_n(y)} d\mu(y)$.

Exercice 3.9.18 Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(i) Montrer que $\text{Ker} T = \text{Ker}(T^*T)$.

(ii) Montrer que les adhérences de $T(\mathcal{H})$ et $T^*T(\mathcal{H})$ dans \mathcal{H} coïncident.

- (iii) Montrer que T est une isométrie si et seulement si $T^*T = I$.
- (iv) Montrer que T est unitaire si et seulement si T est une isométrie surjective.
- (v) Donner un exemple d'un opérateur T qui est isométrique mais n'est pas surjectif.

Exercice 3.9.19 (Opérateurs diagonaux) Soit $(a_n)_n$ une suite dans \mathbf{K} et soit $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ l'application linéaire définie par $T((x_n)_n) = ((a_n x_n)_n)$ pour tout $(x_n)_n \in \ell^2$.

- (i) Montrer que $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ si et seulement si $(a_n)_n$ est bornée.
- (ii) On suppose que $(a_n)_n$ est bornée. Montrer que T est normal.
- (iii) Montrer que T est compact si et seulement si $\lim_n a_n = 0$.

Exercice 3.9.20 (Le spectre d'un opérateur) Soit E un espace de Hilbert. Soit $T \in \mathcal{B}(E)$. Le spectre $\sigma(T)$ de T est l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{C}$ tels que $T - \lambda I$ n'est pas bijective. On rappelle (voir TD 2 Exercice 11) que, si $\lim_n \|T^n\|^{1/n} < 1$. (par exemple, si $\|T\| < 1$) alors $I - T$ est inversible.

- (i) Montrer que $\lambda \leq \lim_n \|T^n\|^{1/n} \leq \|T\|$ pour tout $\lambda \in \sigma(T)$.
- (ii) Soit E un espace de Hilbert et T un opérateur unitaire. Montrer que $|\lambda| = 1$ pour tout $\lambda \in \sigma(T)$.

Exercice 3.9.21 Soit X un intervalle de \mathbf{R} muni de la mesure de Lebesgue μ Soit $(f_n)_n$ une base hilbertienne $L^2(X, \mu)$. Pour tout $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, on définit $f_m \otimes f_n : X \times X \rightarrow \mathbf{C}$ par $f_m \otimes f(x, y) = f_m(x)f_n(y)$ pour $(x, y) \in X \times X$.

(i) Montrer que $(f_m \otimes f_n)_{(m,n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}}$ est une famille orthonormée dans l'espace de Hilbert $L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$.

(ii) Montrer que $(f_m \otimes f_n)_{(m,n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}}$ est une base Hilbertienne de $L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$.

Indication : Soit $F \in L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$ tel que $\langle F | f_m \otimes f_n \rangle = 0$ pour tout $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Considérer, pour tout n , la fonction sur X définie par $F_n(x) = \int_X F(x, y) \overline{f_n(y)} d\mu(y)$.

Exercice 3.9.22 (Opérateur de Volterra) Soit $V \in \mathcal{B}(L^2[0, 1])$ l'opérateur de Volterra défini par

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad \text{pour tout } f \in L^2[0, 1], x \in [0, 1].$$

(i) Montrer que V est compact.

(ii) Déterminer V^* .

(iii) Montrer que $\lim_n \|T^n\|^{1/n} = 0$

Indication : procéder comme dans TD 2, Exercice 9.

(iv) Montrer que si $\lambda \in \mathbf{C}$ appartient au spectre $\sigma(V)$ de V (voir Exercice 3.9.20, alors $\lambda = 0$.

(v) Montrer que $0 \in \sigma(V)$.

Indication : que peut-on dire des fonctions g appartenant à l'image de V ; en déduire que V n'est pas surjectif.

(vi) Montrer que V n'a pas de valeur propre.

Exercice 3.9.23 Soit $k \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$ la fonction définie par $k(x, y) = \min(x, y)$

Soit K l'opérateur intégral associé sur l'espace de Hilbert réel $L^2([0, 1], \mathbf{R})$:

$$Kf(x) = \int_0^1 \min(x, y)f(y)dy = \int_0^x yf(y)dy + x \int_x^1 f(y)dy$$

pour tous $f \in L^2([0, 1], \mathbf{R})$ et $x \in [0, 1]$.

(i) Vérifier que K est compact et symétrique.

Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ une valeur propre non nulle de K et $f \in L^2([0, 1], \mathbf{R})$ une fonction propre associée.

(ii) Montrer que f coïncide presque partout avec une fonction F de classe C^2 qui satisfait à l'équation différentielle $\lambda F'' + F = 0$ avec les conditions $F(0) = F'(1) = 0$.

(iii) Déduire de (i) que l'ensemble des valeurs propres de K est $\{\frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} : n \in \mathbf{N}\}$ et que l'espace propre associée à $\frac{4}{\pi^2(2n+1)^2}$ est engendré par la fonction $f_n(x) = \sqrt{2} \sin(\frac{(2n+1)\pi}{2}x)$.

(iv) Calculer $\|k\|_{L^2([0,1] \times [0,1])}$.

(v) Déduire de ce qui précède que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 3.9.24 Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable et $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur compact.

(i) Soit $(x_n)_n$ une suite dans \mathcal{H} . Supposons qu'il existe un vecteur $y \in \mathcal{H}$ avec $\lim_n (T - I)x_n = y$. Montrer qu'il existe une suite $z_n \in (\text{Ker}(T - I))^\perp$ telle que $\lim_n (T - I)z_n = y$.

(ii) Soit $x_n \in \mathcal{H}$ une suite non bornée et contenue dans $(\text{Ker}(T - I))^\perp$. Montrer qu'il n'existe pas de vecteur $y \in \mathcal{H}$ avec $\lim_n (T - I)x_n = y$.

Indication : Supposer, par l'absurde, qu'un tel y existe et considérer la suite $\frac{1}{\|x_n\|}(T - I)x_n$.

(iii) Soit $x_n \in \mathcal{H}$ une suite bornée. Supposons qu'il existe un vecteur $y \in \mathcal{H}$ avec $\lim_n (T - I)x_n = y$. Montrer que $y \in (T - I)(\mathcal{H})$.

(iv) Montrer que $(T - I)(\mathcal{H})$ est fermée.

Chapitre 4

Théorèmes classiques d'analyse fonctionnelle

4.1 Le Théorème de Hahn-Banach

Soit E un espace vectoriel normé; nous ne savons pas encore s'il existe une forme linéaire continue *non nulle* $\varphi : E \rightarrow \mathbf{K}$, c-à-dsi $E' \neq \{0\}$. Cela nous sera garanti par un des théorèmes-phares de l'analyse fonctionnelle : le Théorème de Hahn-Banach.

Soit E un espace vectoriel normé complexe. Alors E est également un espace vectoriel normé réel. Il y a donc deux notions de dual pour E : le dual (topologique) de E comme espace vectoriel normé réel, noté $E'_{\mathbf{R}}$ et qui est l'ensemble des formes \mathbf{R} -linéaires continues $\varphi : E \rightarrow \mathbf{R}$ et le dual de l'espace vectoriel normé complexe E , noté $E'_{\mathbf{C}}$ et qui est l'ensemble des formes \mathbf{C} -linéaires continues $\varphi : E \rightarrow \mathbf{C}$. Pour $\varphi \in E'_{\mathbf{C}}$, notons par $\text{Re}\varphi \in E'_{\mathbf{R}}$ la forme \mathbf{R} -linéaire définie par $\text{Re}\varphi(x) = \text{Re}(\varphi(x))$ pour tout $x \in E$.

Proposition 4.1.1 (Dual réel/dual complexe) *Soit E un espace vectoriel normé complexe. L'application*

$$\Phi : E'_{\mathbf{C}} \rightarrow E'_{\mathbf{R}}, \quad \varphi \mapsto \text{Re}\varphi$$

est une bijection isométrique \mathbf{R} -linéaire.

Démonstration Il est clair que Φ est \mathbf{R} -linéaire.

• Φ est isométrique : en effet, soit $\varphi \in E'_{\mathbf{C}}$. Alors, pour tout $x \in E$, on a

$$|\text{Re}\varphi(x)| \leq |\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \|x\|$$

et donc $\|\Phi(\varphi)\| \leq \|\varphi\|$.

D'autre part, soit $x \in E$ avec $\|x\| \leq 1$. Il existe $u \in \mathbf{C}$ avec $|u| = 1$ et tel que $u\varphi(x) = |\varphi(x)|$. On a alors

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &= u\varphi(x) = \varphi(ux) \\ &= \operatorname{Re}(\varphi(ux)) = \Phi(\varphi)(ux) \leq \|\Phi(\varphi)\|. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)| \leq \|\Phi(\varphi)\|.$$

• Φ est surjective : soit $\ell \in E'_{\mathbf{R}}$. Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbf{C}$ définie par

$$\varphi(x) = \ell(x) - i\ell(ix) \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Comme $E \rightarrow E$, $x \mapsto ix$ est \mathbf{R} -linéaire, on voit que φ est \mathbf{R} -linéaire. De plus,

$$\begin{aligned} \varphi(ix) &= \ell(ix) - i\ell(-x) = \ell(ix) + i\ell(x) \\ &= i(\ell(x) - i\ell(ix)) = i\varphi(x), \end{aligned}$$

ce qui montre que φ est \mathbf{C} -linéaire. Comme il est clair que φ est continue, on a donc $\varphi \in E'_{\mathbf{C}}$. De plus, on a $\operatorname{Re}(\varphi(x)) = \ell(x)$. Donc $\Phi(\varphi) = \ell$ ■

Théorème 4.1.2 (Théorème de Hahn-Banach) Soit E un espace vectoriel normé sur \mathbf{K} , pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Pour tout $\varphi \in F'$, il existe $\psi \in E$ avec $\psi|_F = \varphi$ et $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Démonstration Montrons d'abord qu'il suffit de considérer le cas $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. En effet, supposons le théorème démontré dans le cas réel. Soit E un espace vectoriel normé sur \mathbf{C} , F un sous-espace vectoriel de E et $\varphi \in F'$. Alors, par la Proposition 4.1.1, on a $\operatorname{Re}\varphi \in F'_{\mathbf{R}}$ et $\|\operatorname{Re}\varphi\| = \|\varphi\|$. Il existe alors $\ell \in E'_{\mathbf{R}}$ avec $\|\ell\| = \|\operatorname{Re}\varphi\|$. $\ell|_F = \operatorname{Re}\varphi$. De nouveau par la Proposition 4.1.1, il existe $\psi \in E'_{\mathbf{C}}$ avec $\operatorname{Re}\psi = \ell$ et $\|\psi\| = \|\ell\|$. On a donc $\|\psi\| = \|\varphi\|$. De plus, comme $\operatorname{Re}\varphi = \ell|_F = \operatorname{Re}(\psi|_F)$, on a $\psi|_F = \varphi$.

On peut donc supposer que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Nous allons procéder en deux étapes.

• **Premier cas :** F est de codimension 1 dans E . Soit $x_0 \in E \setminus F$. Alors $E = F \oplus \mathbf{R}x_0$.

Pour tout $y \in F$, posons

$$a(y) = \|\varphi\| \|x_0 + y\| - \varphi(y) \quad \text{et} \quad b(y) = -\|\varphi\| \|x_0 + y\| - \varphi(y).$$

Pour tous $y, z \in F$, on a

$$\begin{aligned}
 a(y) - b(z) &= \|\varphi\| \|x_0 + y\| - \varphi(y) + \|\varphi\| \|x_0 + z\| + \varphi(z) \\
 &= \|\varphi\| (\|x_0 + y\| + \|-x_0 - z\|) - \varphi(y - z) \\
 &\geq \|\varphi\| (\|x_0 + y - x_0 - z\|) - \varphi(y - z) \\
 &= \|\varphi\| (\|y - z\|) - \varphi(y - z) \\
 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Ceci montre que

$$\inf_{y \in F} a(y) \geq \sup_{y \in F} b(y).$$

Il existe donc $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$b(y) \leq \lambda \leq a(y) \quad \text{pour tout } y \in F,$$

c-à-d

$$-\|\varphi\| \|x_0 + y\| - \varphi(y) \leq \lambda \leq \|\varphi\| \|x_0 + y\| - \varphi(y) \quad \text{pour tout } y \in F,$$

ou encore

$$-\|\varphi\| \|x_0 + y\| \leq \varphi(y) + \lambda \leq \|\varphi\| \|x_0 + y\| \quad \text{pour tout } y \in F,$$

ce qui équivaut à

$$|\varphi(y) + \lambda| \leq \|\varphi\| \|x_0 + y\|.$$

On définit alors une forme linéaire $\psi : E \rightarrow \mathbf{R}$ par

$$\psi(y + tx_0) = \varphi(y) + t\lambda \quad \text{pour tous } y \in F, t \in \mathbf{R}.$$

On a bien $\psi|_F = \varphi$. De plus, pour tous $y \in F$, $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}
 |\psi(y + tx_0)| &= |\varphi(y) + t\lambda| = |t|\varphi(t^{-1}y) + \lambda| \\
 &\leq |t|\|\varphi\| \|x_0 + t^{-1}y\| \\
 &= \|\varphi\| \|y + tx_0\|
 \end{aligned}$$

Ceci montre que ψ est continue et que $\|\psi\| \leq \|\varphi\|$. D'autre part, comme ψ prolonge φ , on a trivialement, $\|\varphi\| \leq \|\psi\|$ et donc $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

• **Deuxième cas :** F est de codimension quelconque dans E . La preuve se ramène au premier cas, à travers une application du Lemme de Zorn.

En effet, considérons l'ensemble \mathcal{F} des couples (G, ψ) , où G est un sous-espace vectoriel de E avec $F \subset G$ et où $\psi \in G'$ est telle que $\psi|_F = \varphi$ et $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Définissons sur \mathcal{F} la relation d'ordre

$$(G_1, \psi_1) \leq (G_2, \psi_2) \iff G_1 \subset G_2 \quad \text{et} \quad \psi_2|_{G_1} = \psi_1.$$

Alors \mathcal{F} est un ensemble ordonné non vide car $(F, \varphi) \in \mathcal{F}$. Vérifions que (\mathcal{F}, \leq) est inductif. En effet, soit $\{(G_i, \psi_i) : i \in I\}$ une partie totalement ordonnée de \mathcal{F} . Posons $G = \bigcup_{i \in I} G_i$. Définissons $\psi : G \rightarrow \mathbf{R}$ par $\psi(x) = \psi_i(x)$ si $x \in G_i$. La fonction G est bien définie : soient i et j tels que $x \in G_i$ et $x \in G_j$. Avec $k = \max\{i, j\}$, on a $\psi_k = \psi_i$ sur G_i et $\psi_k = \psi_j$ sur G_j et donc $\psi_i(x) = \psi_j(x)$.

Vérifions que G est un sous-espace vectoriel et que ψ est linéaire. Soient $x, y \in G$ et $t \in \mathbf{R}$. Il existe alors $i, j \in I$ tels que $x \in G_i$ et $y \in G_j$. Alors $x, y \in G_k$, où $k = \max\{i, j\}$ et donc $tx + y \in G_k \subset G$. De plus, $\psi(tx + y) = \psi_k(tx + y) = t\psi_k(x) + \psi_k(y)$.

Il est clair, par définition, que $\psi|_F = \varphi$. Vérifions que ψ est continue et que $\|\psi\| = \|\varphi\|$. Soit $x \in G$. Alors $x \in G_i$ pour un $i \in I$. D'où

$$\|\psi(x)\| = \|\psi_i(x)\| \leq \|\psi_i\| \|x\| = \|\varphi\| \|x\|.$$

Ceci montre que $\|\psi\| \leq \|\varphi\|$. Comme ψ prolonge φ , on a donc $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

Nous avons ainsi montré que $(G, \psi) \in \mathcal{F}$. Il est clair que $(G_i, \varphi_i) \leq (G, \psi)$ pour tout $i \in I$.

Par le Lemme de Zorn, il existe donc un élément maximal $(G, \psi) \in \mathcal{F}$. Montrons que $G = E$, ce qui terminera la démonstration.

Supposons, par l'absurde, que $G \neq E$. Il existe alors $x_0 \in E \setminus G$. En appliquant le premier cas à $G_0 = G \oplus \mathbf{R}x_0$, il existe $\psi_0 \in G_0'$ tel que $\psi_0|_G = \psi$ et $\|\psi_0\| = \|\psi\|$. Ceci signifie que $(G_0, \psi_0) \in \mathcal{F}$ et $(G, \varphi) \leq (G_0, \psi_0)$. Comme $(G_0, \psi_0) \neq (G, \varphi)$, ceci contredit la maximalité de (G, ψ) . ■

Corollaire 4.1.3 *Soit E un espace vectoriel normé et $x_0 \in E$. Alors il existe $\varphi \in E'$ tel que $\varphi(x_0) = \|x_0\|$ et $\|\varphi\| \leq 1$.*

Démonstration On considère le sous-espace vectoriel $F = \mathbf{K}x_0$. Soit $\ell : F \rightarrow \mathbf{K}$ la forme linéaire (trivialement continue) définie par $\ell(tx_0) = t\|x_0\|$. Alors $\ell(x_0) = \|x_0\|$ et $\|\ell\| \leq 1$ (on a $\|\ell\| = 1$ si $x_0 \neq 0$). Par le Théorème de Hahn-Banach 4.1.2, il existe $\varphi \in E'$ tel que $\varphi(x_0) = \|x_0\|$ et $\|\varphi\| \leq 1$. ■

Soit E un espace vectoriel normé et E'' son bidual. Rappelons la définition de l'application canonique $j : E \rightarrow E''$ (voir Définition 3.6.1) :

$$j(x)(\varphi) = \varphi(x) \quad \text{pour tous } x \in E, \varphi \in E'.$$

Corollaire 4.1.4 *Soit E un espace vectoriel normé. L'application canonique $j : E \rightarrow E''$ est une isométrie.*

Démonstration

Soit $x \in E$. Nous savons déjà que $\|j(x)\| \leq \|x\|$. Par le Corollaire 4.1.3, il existe $\varphi \in E'$ avec $\|\varphi\| \leq 1$ et tel que $\varphi(x) = \|x\|$. On a alors

$$j(x)(\varphi) = \varphi(x) = \|x\|.$$

Donc $\|j(x)\| = \|x\|$ ■

4.2 Le Théorème de Baire

Le Théorème de Baire est un résultat simple avec de nombreuses applications intéressantes.

Rappelons que l'intérieur $\text{Int}(F)$ d'une partie F d'un espace métrique (E, d) est le plus grand ouvert contenu dans F , c-à-d

$$\text{Int}(F) = \{x \in E : \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subset F\}.$$

Proposition 4.2.1 *Soient (E, d) un espace métrique complet et A une partie de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) A est dense dans E ;
- (ii) $\text{Int}(E \setminus A) = \emptyset$.

Démonstration En effet, A est dense si et seulement si $A \cap U \neq \emptyset$, pour tout ouvert $U \neq \emptyset$. Ceci est le cas si et seulement si $U \not\subset E \setminus A$ pour tout ouvert $U \neq \emptyset$, c-à-d $\text{Int}(E \setminus A) = \emptyset$ ■

Théorème 4.2.2 (Théorème de Baire) *Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses de E . Alors $U := \bigcap_n U_n$ est dense dans E .*

Démonstration Soit V un ouvert non vide de E . Il faut montrer que $V \cap U \neq \emptyset$.

Comme U_0 est un ouvert dense, $U_0 \cap V$ est un ouvert non vide. Il existe donc une boule $B(x_0, r_0) \subset U_0 \cap V$. On peut supposer que $r_0 \leq 1$. Comme U_1 est un ouvert dense, $U_1 \cap B(x_0, r_0)$ est un ouvert non vide. Il existe donc une boule $B(x_1, r_1) \subset U_1 \cap B(x_0, r_0)$. On peut supposer que $r_1 \leq 1/2$. De proche en proche, on construit une suite de boules $B(x_n, r_n)$ avec $r_n \leq 1/n$ telles que $B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset U_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$. Soient n, m, k tels que $n \geq k$ et $m \geq k$; comme $x_n, x_m \in B(x_k, r_k)$, on a $d(x_n, x_m) \leq 2r_k \leq 2/k$. Ceci montre que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy. Comme E est complet, $x = \lim_n x_n$ existe. Pour tout n , on a $x_m \in B(x_n, r_n)$ et donc $d(x_m, x_n) \leq r_n$ pour tout $m \geq n$. En passant à la limite $m \rightarrow +\infty$, on a donc $d(x, x_n) \leq r_n$, c-à-d $x \in B(x_n, r_n)$. Ceci montre que

$$x \in \bigcap_n B(x_n, r_n) \subset \bigcap_n U_n = U \blacksquare$$

Corollaire 4.2.3 Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit $(F_n)_n$ une suite de partie fermées de E telles que $E = \bigcup_n F_n$. Alors il existe n tel que $\text{Int}F_n \neq \emptyset$.

Démonstration Supposons, par l'absurde, que $\text{Int}F_n = \emptyset$ pour tout n . Alors, par la Proposition 4.2.1, l'ouvert $U_n = E \setminus F_n$ est dense dans E . Par le Théorème 4.2.2, $U = \bigcap_n U_n$ est dense dans E . La Proposition 4.2.1 montre alors que $E \setminus U = \bigcup_n F_n$ est d'intérieur vide et ceci contredit le fait que $E = \bigcup_n F_n$ ■

4.3 Le Théorème de l'application ouverte

Une des applications les plus spectaculaires du Théorème de Baire est le Théorème de l'application ouverte.

Théorème 4.3.1 (Théorème de l'application ouverte) Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \rightarrow F$ une application linéaire continue et surjective. Alors T est ouverte.

Démonstration Pour tout $r > 0$, désignons par $F(r) = \overline{T(B(0, r))}$ l'adhérence dans F de l'image par T de la boule ouverte $B(0, r) \subset E$.

• **Première étape :** Pour tout $r > 0$, on a $0 \in \text{Int}(F(r))$. En effet, comme $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} kB(0, r/2)$ et comme T est surjective, on a

$$\begin{aligned} F &= T\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} kB(0, r/2)\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT(B(0, r/2)) \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} kF(r/2). \end{aligned}$$

Par le Théorème de Baire 4.2.3, il existe un $k \geq 1$ tel que $\text{Int}(kF(r/2)) \neq \emptyset$. Comme $y \mapsto ky$ est un homéomorphisme de F , on a donc $\text{Int}(F(r/2)) \neq \emptyset$. Soit $y_0 \in \text{Int}(F(r/2))$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(y_0, \varepsilon) \subset F(r/2)$. Montrons que $B(0, \varepsilon) \subset F(r)$. Ceci achèvera la preuve de la première étape.

Soit $y \in B(0, \varepsilon)$. Comme $y_0 \in F(r/2) = \overline{T(B(0, r/2))}$, il existe une suite $(x_n)_n$ in $B(0, r/2)$ telle que $\lim_n T(x_n) = y_0$. D'autre part, $y_0 - y \in B(y_0, \varepsilon) \subset F(r/2)$. Il existe donc une suite $(z_n)_n$ in $B(0, r/2)$ telle que $\lim_n T(z_n) = y_0 - y$. On a alors $x_n - z_n \in B(0, r)$ et $\lim_n T(x_n - z_n) = y$. Ceci montre que $y \in F(r)$.

• **Deuxième étape :** Pour tout $r > 0$, on a $F(r/2) \subset T(B(0, r))$. En effet, soit $y_1 \in \overline{F(r/2)}$. Par la première étape, $0 \in \text{Int}(F(r/4))$, c-à-d $\text{Int}(F(r/4))$ contient une certaine boule $B(0, s)$. Il existe donc $x_1 \in B(0, r/2)$ tel que $y_1 - T(x_1) \in B(0, s) \subset F(r/4)$. On pose $y_2 = y_1 - T(x_1)$. Par la première étape, $0 \in \text{Int}(F(r/2^3))$. Il existe donc $x_2 \in B(0, r/2^2)$ tel que $y_2 - T(x_2) \in F(r/2^3)$. En continuant de la sorte, on construit deux suites $(x_n)_n$ dans E et $(y_n)_n$ dans F telles que, pour $n \in \mathbf{N}^*$, on ait

- (1) $x_n \in B(0, r/2^n)$;
- (2) $y_n \in F(r/2^n)$;
- (3) $y_{n+1} = y_n - T(x_n)$.

Comme $\|x_n\| \leq r/2^n$, et comme E est complet, la série $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} x_n$ converge vers un élément $x \in E$ et on a $\|x\| < r$. On a, d'autre part, pour tout $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^N T(x_n) = \sum_{n=1}^N y_n - y_{n+1} = y_1 - y_{N+1}.$$

Comme $y_N \in F(r/2^N)$, on a $\|y_N\| \leq \|T\|r2^{-N}$ et donc $\lim_N y_N = 0$. Ceci implique que $\sum_{n=1}^{\infty} T(x_n) = y_1$. Mais, par ailleurs, par continuité de T ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} T(x_n) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) = T(x).$$

D'où $y_1 = T(x)$ et $y_1 \in T(B(0, r))$ car $x \in B(0, r)$.

• **Troisième étape** : T est ouverte. En effet, en combinant les deux étapes précédentes, on voit que $0 \in \text{Int}(T(B(0, r)))$ pour tout $r > 0$.

Soit U un ouvert de E et soit $y \in T(U)$. Soit $x \in U$ tel que $y = T(x)$. Il existe alors $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Comme $0 \in \text{Int}(T(B(0, r)))$, on a $y = T(x) \in \text{Int}(T(B(x, r)))$ (car $f : z \mapsto z + T(x)$ est un homéomorphisme de F et $T(B(x, r)) = f(T(B(0, r)))$). Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que

$$B(y, \varepsilon) \subset T(B(x, r)) \subset T(U)$$

Ceci montre que T est ouverte. ■

Corollaire 4.3.2 (Théorème des isomorphismes de Banach) Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \rightarrow F$ une bijection linéaire et continue. Alors T^{-1} est continue.

Démonstration Ceci est une conséquence directe du Théorème de l'application ouverte 4.3.1, car une bijection continue et ouverte entre deux espaces métriques est un homéomorphisme. ■

Corollaire 4.3.3 Soit E un espace vectoriel et soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes $\|\cdot\|_1$ sur E telles qu'il existe $C > 0$ avec $\|x\|_2 \leq C\|x\|_1$ pour tout $x \in E$. Si $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$ sont complets, alors $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes

Démonstration On applique le Corollaire 4.3.2 à l'application

$$\text{Id} : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_2). \quad \blacksquare$$

4.4 Le Théorème de Banach-Steinhaus

Une autre application spectaculaire du Théorème de Baire est le Théorème de Banach-Steinhaus.

Théorème 4.4.1 (Théorème de Banach-Steinhaus) Soient E espace de Banach et F un espace vectoriel normé.

(i) Soit \mathcal{F} un partie de $\mathcal{B}(E, F)$ telle que, pour tout $x \in E$, le sous-ensemble $\{T(x) : T \in \mathcal{F}\}$ est borné. Alors \mathcal{F} est bornée dans $\mathcal{B}(E, F)$.

(ii) Soit $(T_n)_n$ une suite dans $\mathcal{B}(E, F)$ telle que, pour tout $x \in E$, la limite $\lim_n T_n = Tx$ existe. Alors $T \in \mathcal{B}(E, F)$.

Démonstration

(i) Pour tout $n \geq 1$, soit

$$A_n = \{x \in E : \|Tx\| \leq n \text{ pour tout } T \in \mathcal{F}\} = \bigcap_{T \in \mathcal{F}} \{x \in E : \|Tx\| \leq n\}.$$

Comme chaque $T \in \mathcal{F}$ est continue, A_n est une partie fermée de E . Par hypothèse, on a $E = \bigcup_n A_n$. Le Théorème de Baire 4.2.2 implique donc que $\text{Int}(A_n) \neq \emptyset$ pour un certain n .

Soit $B(x_0, \varepsilon)$ une boule contenue dans A_n . Alors, pour tout $x \in B(x_0, \varepsilon)$, on a $\|Tx\| \leq n$ pour tout $T \in \mathcal{F}$. Soit $x \in B(0, \varepsilon)$. Alors $x + x_0 \in B(x_0, \varepsilon)$ et donc, pour tout $T \in \mathcal{F}$, on a

$$\|Tx\| \leq \|T(x + x_0)\| + \|Tx_0\| \leq n + n = 2n.$$

Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Alors $\frac{\varepsilon}{2\|x\|}x \in B(0, \varepsilon)$ et donc

$$\|Tx\| \leq \frac{1}{\varepsilon}(2n)\|x\| \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{F}.$$

Ceci montre que $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\| \leq \frac{2n}{\varepsilon}$.

(ii) On vérifie que l'application

$$T : E \rightarrow F, \quad x \mapsto \lim_n T_n x$$

est linéaire. La suite $(T_n x)_n$ est bornée car convergente. La partie (i) implique qu'il existe $C > 0$ tel que $\sup_n \|T_n\| \leq C$. On a alors $\|T_n x\| \leq C\|x\|$, pour tout $x \in E$ et pour tout n . En passant à la limite, on obtient $\|Tx\| \leq C\|x\|$, pour tout $x \in E$ et ceci montre que T est continue. ■

4.5 Exercices

Exercice 4.5.1 Soient E un espace vectoriel normé, S un sous-espace vectoriel fermé de E et $x_0 \in E \setminus S$. Soit

$$\delta := \inf_{x \in S} \|x - x_0\| > 0.$$

Montrer qu'il existe $\varphi \in E'$ avec $\varphi|_S = 0$, $\varphi(x_0) = \delta$ et $\|\varphi\| = 1$.

Indication : Soit $F = \text{Vect}(S \cup \{x_0\})$. Construire d'abord $\psi \in F'$ avec $\psi|_S = 0$, $\psi(x_0) = \delta$ et $\|\psi\| = 1$.

Exercice 4.5.2 (Le préduel d'un espace vectoriel normé séparable est séparable) Soit E un espace vectoriel normé. On suppose que le dual E' de E est séparable.

- (i) Montrer que $S = \{\varphi \in E' : \|\varphi\| = 1\}$ est séparable.
- (ii) Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite dense dans S . Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $x_n \in E$ avec $\|x_n\| = 1$ et $\varphi_n(x_n) \geq 1/2$.
- (iii) Soit A le \mathbf{Q} -espace vectoriel engendré par $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$. Montrer que A est une suite dense dans E .

Indication : Soit F l'adhérence de $\text{Vect}(A)$. Supposer, par l'absurde, qu'il existe $x \in E \setminus F$ et utiliser l'Exercice 4.5.1.

Exercice 4.5.3 Soient E un espace vectoriel normé, S une partie de E et $x_0 \in E$. Soit F l'adhérence de $\text{Vect}(S)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $x_0 \in F$;
- (ii) pour toute $\varphi \in E'$ telle que $\varphi|_S = 0$, on a $\varphi(x_0) = 0$.

Indication : utiliser l'Exercice 4.5.1.

Exercice 4.5.4 (Un problème d'interpolation) Soient E un espace vectoriel normé sur \mathbf{K} , $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E et α_n une suite de scalaires dans \mathbf{K} . Soit $C > 0$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe $\varphi \in E'$ avec $\|\varphi\| \leq C$ telle que $\varphi(x_n) = \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$;
- (ii) pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tous $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, on a

$$\left| \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k \right| \leq C \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right\|$$

Exercice 4.5.5 (Moyennes invariantes) Soit $\ell_{\mathbf{R}}^{\infty}$ l'espace de Banach des suites réelles bornées. Soit $T : \ell_{\mathbf{R}}^{\infty} \rightarrow \ell_{\mathbf{R}}^{\infty}$ l'opérateur de décalage à droite défini ar

$$T(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_1, a_2, a_3, \dots) \quad \text{pour tout } (a_0, a_1, a_2, \dots) \in \ell_{\mathbf{R}}^{\infty}.$$

Soit $F \subset \ell_{\mathbf{R}}^{\infty}$ l'image de $I - T$.

On note $\mathbf{1}$ la suite $(1, 1, 1, \dots) \in \ell_{\mathbf{R}}^{\infty}$.

- (i) Montrer que $\|1 - (x - Tx)\|_{\infty} \geq 1$ pour tout $x \in \ell_{\mathbf{R}}^{\infty}$. En déduire que $d(\mathbf{1}, F) = 1$.

Indication : Distinguer les cas selon que $(x_n)_n$ est décroissante ou non.

(ii) Montrer qu'il existe une forme linéaire continue m sur $\ell_{\mathbf{R}}^{\infty}$ telle que $\|m\| = 1$, $m(\mathbf{1}) = 1$ et $m(x) = m(Tx)$ pour tout $x \in \ell_{\mathbf{R}}^{\infty}$.

Indication : utiliser l'Exercice 4.5.1.

(iii) Soit c_0 le sous-espace des suites $x = (x_n)_n$ avec $\lim_n x_n = 0$. Montrer que $m(x) = 0$ pour tout $x \in c_0$.

Indication : Montrer que $x - T^k x \in c_0$ et que $m(x) = m(T^k x)$ pour tout $x \in \ell_{\mathbf{R}}^{\infty}$ et $k \in \mathbf{N}$.

(iv) Montrer que, pour toute suite réelle convergente $x = (x_n)_n$, on a $m(x) = \lim_n x_n$.

Exercice 4.5.6 (Somme directe d'espaces vectoriels normés)

Soient $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(F, \|\cdot\|_2)$ deux espaces vectoriels normés. On note $E \oplus F$ l'espace vectoriel somme directe de E et F , c-à-d le produit cartésien $E \times F$ muni des opérations $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$. On définit une norme sur $E \oplus F$ par $\| \! \| (x, y) \! \|_{\infty} = \max\{\|x\|_1, \|y\|_2\}$.

Soient $p_1 : E \oplus F \rightarrow E$ et $p_2 : E \oplus F \rightarrow F$ les projections canoniques définies par $p_1(x, y) = x$ et $p_2(x, y) = y$.

(i) Vérifier que p_1 et p_2 sont continues et que la topologie définie par $\| \! \| \cdot \! \|_{\infty}$ sur $E \oplus F$ est la topologie-produit de celles de E et F .

(ii) Montrer que $E \oplus F$ est un espace de Banach si et seulement si E et F sont des espaces de Banach.

(iii) Soit $p \in [1, +\infty[$. Montrer que

$$(x, y) \mapsto \| \! \| (x, y) \! \|_p = (\|x\|_1^p + \|y\|_2^p)^{1/p}$$

est une norme sur $E \oplus F$ équivalente à la norme $(x, y) \mapsto \| \! \| (x, y) \! \|_{\infty}$.

Exercice 4.5.7 (Théorème du graphe fermé) Soient E et F des espaces vectoriels normés. On munit l'espace vectoriel $E \oplus F$ de la norme $\| \! \| (x, y) \! \|_{\infty} = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ pour $x \in E, y \in F$ (voir Exercice 4.5.6). Soit $T : E \rightarrow F$ une application linéaire. On note $G(T) = \{(x, Tx) : x \in E\}$ le graphe de T .

(i) Vérifier que $G(T)$ est un sous-espace vectoriel de $E \oplus F$.

(ii) On suppose que T est continue. Montrer que $G(T)$ est fermé dans $E \oplus F$.

(iii) Soit $E = C^1[0, 1]$ et $F = C[0, 1]$ munis de la norme $f \mapsto \|f\|_{\infty}$. Soit $T : E \rightarrow F, f \mapsto f'$, l'opérateur de différentiation. Montrer que $G(T)$ est fermé bien que T ne soit pas continu.

On suppose, à partir de maintenant, que E et F sont des espaces de Banach et que le graphe $G(T)$ de l'application linéaire $T : E \rightarrow F$ est fermé.

(iv) Montrer que l'application $\pi : E \rightarrow G(T), x \mapsto (x, Tx)$ est continue.

Indication : Observer que π est une bijection et que π^{-1} est continue. Appliquer alors le Théorème des isomorphismes de Banach.

(v) Montrer que T est continue.

Indication : Observer que $T = p_2 \circ \pi$ où $p_2 : E \oplus F \rightarrow F$ est la projection canonique.

(vi) Pour $p \in [1, +\infty]$, soit $(a_n)_n$ une suite de scalaires dans \mathbf{K} telle que $(a_n x_n)_n \in \ell^p$ pour toute suite $(x_n)_n \in \ell^p$. Montrer que $(a_n)_n \in \ell^\infty$.

Indication : Montrer que le graphe de l'application $T : \ell^p \rightarrow \ell^p$ définie par $T((x_n)_n) = (a_n x_n)_n$ est fermé.

Exercice 4.5.8 (Espace supplémentaire topologique) Soient E un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel fermé de E . On suppose que F admet un sous-espace supplémentaire topologique, c-à-d qu'il existe un sous-espace vectoriel fermé G de E tel que $E = F \oplus G$ et $F \cap G = \{0\}$. Montrer que la bijection linéaire

$$T : F \oplus G \rightarrow E, (x, y) \mapsto x + y$$

est un homéomorphisme, où $F \oplus G$ est muni de la norme comme dans l'Exercice 4.5.6.

Exercice 4.5.9 (Réalité du spectre d'un opérateur auto-adjoint) Soient E un espace de Banach et $T \in \mathcal{B}(E)$.

(i) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes

- T est injectif et son image $T(E)$ est fermée ;
- il existe $C > 0$ tel que $\|Tx\| \geq C\|x\|$ pour tout $x \in E$.

On suppose à partir de maintenant que E est un espace de Hilbert.

(ii) Soit $T \in \mathcal{B}(E)$ tel qu'il existe $C > 0$ avec $\|Tx\| \geq C\|x\|$ et $\|T^*x\| \geq C\|x\|$ pour tout $x \in E$. Montrer que T et T^* sont inversibles.

(iii) Soit $T \in \mathcal{B}(E)$ auto-adjoint et soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Montrer que, pour tout $x \in E$ avec $\|x\| = 1$, on a

$$\|(T - \lambda I)x\| \geq |\langle (T - \lambda I)x | x \rangle| \geq |\operatorname{Im}(\lambda)|.$$

(iv) Soit $T \in \mathcal{B}(E)$ auto-adjoint et soit $\lambda \in \mathbf{C}$ appartenant au spectre $\sigma(T)$ de T (voir Exercice 3.9.20). Montrer que $\lambda \in \mathbf{R}$.

Exercice 4.5.10 (Une application du Théorème de Banach-Steinhaus)

Soit $(a_n)_n$ une suite de scalaires dans \mathbf{K} telle que la série de terme générale $a_n x_n$ soit convergente pour toute suite $(x_n)_n \in \ell^1$. Montrer que $(a_n)_n \in \ell^\infty$.

Indication : Considérer, pour tout $N \in \mathbf{N}$, la forme linéaire $\varphi_N : \ell^1 \rightarrow \mathbf{K}$ définie par $\varphi_N((x_n)_n) = \sum_{n=0}^N a_n x_n$. Utiliser le Théorème de Banach-Steinhaus et l'Exercice 3.9.11

Exercice 4.5.11 (Formules de quadrature) Soit $[a, b]$ un intervalle de \mathbf{R} . Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on fixe une suite de nombres réels $\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)}$ ainsi qu'une partition $a \leq t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} \leq b$ de $[a, b]$. On définit alors une "formule de quadrature"

$$Q_n : C[a, b] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f \mapsto \sum_{k=0}^n \alpha_k^{(n)} f(t_k^{(n)}).$$

On suppose que $(Q_n(P))_n$ converge vers $\int_a^b P(x)dx$ pour tout polynôme P .

(i) Montrer que $(Q_n(f))_n$ converge vers $\int_a^b f(x)dx$ pour tout $f \in C[a, b]$ si et seulement si $\sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_{k=0}^n |\alpha_k^{(n)}| < \infty$.

Indication : Pour montrer que la condition est suffisante, utiliser le Théorème de Weierstraß. Pour montrer que la condition est nécessaire, utiliser le Théorème de Banach-Steinhaus.

(ii) On suppose que $\alpha_k^{(n)} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $0 \leq k \leq n$. Montrer que $(Q_n(f))_n$ converge vers $\int_a^b f(x)dx$ pour tout $f \in C[a, b]$