# Distributions harmoniques

Bachir Bekka

April 26, 2012

Une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est dite *harmonique* si $\Delta T = 0$, où $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial^2/\partial x_i^2$ est l'opérateur de Laplace.

On rappelle qu'une fonction $f$ mesurable sur $\mathbb{R}^n$ est dite à croissante modérée s'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ telle que $|f(x)| \leq C(1+|x|)^k$ pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, où $|x|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$; une telle fonction définit une distribution tempérée $T_f$ par $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$. Si on a $T_f = T_g$ pour deux telles fonctions $f$ et $g$, alors $f = g$ presque partout; par conséquent, si, de plus, $f$ et $g$ sont continues, alors $f = g$ sur $\mathbb{R}^n$.

On se propose de démontrer le théorème suivant.

**Théorème 1** *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ une distribution harmonique. Alors $T$ est la distribution définie par une fonction polynômiale sur $\mathbb{R}^n$.*

Soit $u$ une fonction de classe $C^2$ et à croissante modérée. Comme $\Delta(T_u) = T_{\Delta u}$, le corollaire suivant découle imméditement du théorème précédent.

**Corollaire 2** *Soit $u$ une fonction sur $\mathbb{R}^n$ de classe $C^2$ et à croissante modérée telle que $\Delta u = 0$. Alors $u$ est une fonction polynômiale.*

Toute fonction polynômiale bornée sur $\mathbb{R}^n$ étant nécessairement constante, on obtient comme conséquence le Théorème de Liouville.

**Corollaire 3** ***(Théorème de Liouville)*** *Soit $u$ une fonction sur $\mathbb{R}^n$ de classe $C^2$ telle que $\Delta u = 0$. Si $u$ est bornée, alors $u$ est constante.*

**Remarque 4** (i) Il existe des fonctions harmoniques de classe $C^2$ qui ne sont pas polynômiales: par exemple, la fonction $u(x,y) = e^x \cos y$ est harmonique

sur $\mathbb{R}^2$ (c'est le cas, plus généralement, de la partie réelle d'une fonction entière non polynômiale).
(ii) Toute fonction entière $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ étant harmonique, le Théorème 5 est une généralisation substantielle de sa version bien connue en analyse complexe: une fonction entière bornée est constante.

La preuve du Théorème 1 sera une conséquence facile, d'une part, du Théorème 5 plus bas, qui est un résultat important d'un intérêt indépendant, et, d'autre part, des propriétés usuelles de la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}'$.

Rappelons que le support $\operatorname{supp}(T)$ d'une distribution $T \in \mathcal{S}'$ est le complémentaire du plus grand ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$ avec $\operatorname{supp} \varphi \subset U$. Le résultat suivant caractérise les distributions à support ponctuel. Sans perte de généralité, il suffit de caractériser celles dont le support est $\{0\}$. Des exemples de telles distributions sont fournis par les combinaisons linéaires (finies!) des distributions de la forme $\partial^\alpha \delta_0$ et le résultat est qu'elles sont toutes de cette forme.

**Théorème 5** *Soit* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *avec* $\operatorname{supp}(T) = \{0\}$. *Alors il existe un entier* $N$ *et des nombres complexes* $a_\alpha$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *avec* $|\alpha| \leq N$ *tels que* $T = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0$.

**Déduction du Théorème 1 à partir du Théorème 5** La transformée de Fourier $\mathcal{F}(\varphi)$ d'une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Nous rappelons que $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est un isomorphisme bicontinu qui s'étend en un isomorphisme bicontinu $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ par la formule $\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle$ pour tout $T \in \mathcal{S}'$ et $\varphi \in \mathcal{S}$. De plus, on a $\mathcal{F}(\partial^\alpha T) = (2\pi i \xi)^\alpha \mathcal{F}(T)$ et $\mathcal{F}((-2\pi i x)^\alpha) = \partial^\alpha \delta_0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ avec $\Delta T = 0$. Comme $0 = \mathcal{F}(\Delta T) = \sum_{j=1}^n (2\pi i \xi_j)^2 \mathcal{F}(T)$, on a donc $|\xi|^2 \mathcal{F}(T) = 0$. Il s'ensuit que $S := \mathcal{F}(T)$ est une distribution avec $\operatorname{supp} S \subset \{0\}$. En effet, soit $\varphi \in \mathcal{S}$ avec $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Alors $\varphi$ s'annule sur un voisinage de 0; par conséquent, $\psi$ définie par $\psi(\xi) = \varphi(\xi)/|\xi|^2$ si $\xi \neq 0$ et $\psi(0) = 0$ est dans $\mathcal{S}$. Comme $\varphi = |\xi|^2 \psi$, on a

$$\langle S, \varphi \rangle = \langle S, |\xi|^2 \psi \rangle = \langle |\xi|^2 S, \psi \rangle = 0.$$

Par le Théorème 5, il existe donc un entier $N$ et des nombres complexes $a_\alpha$ tels que $S = \sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0$. Il s'ensuit que

$$T = \mathcal{F}^{-1}(S) = \sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha \mathcal{F}^{-1}(\partial^\alpha \delta_0) = \sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha (-2\pi i x)^\alpha.$$

Ceci montre que $T$ est un polynôme.■

**Preuve du Théorème 5** Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ avec $\operatorname{supp}(T) = \{0\}$. Comme $T$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}$, il existe $C > 0$ et des entiers $m$ et $N$ tels que, pour $\varphi \in \mathcal{S}$, on a

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq N, |\beta|\leq m} \rho_{\alpha\beta}(\varphi),$$

où $\rho_{\alpha\beta}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta (\partial^\alpha \varphi)(x)|$. Voici le point-clé de la preuve:

**Assertion:** $\bigcap_{|\alpha|\leq N} \operatorname{Ker}(\partial^\alpha \delta_0) \subset \operatorname{Ker}(T)$.

Un lemme élémentaire d'algèbre linéaire (voir Lemme 6 plus bas) impliquera alors que $T$, qui est une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{S}$, est une combinaison linéaire des formes linéaires $\partial^\alpha \delta_0$ pour $|\alpha| \leq N$.

Pour montrer l'assertion, soit $\varphi \in \mathcal{S}$ avec $\langle \partial^\alpha \delta_0, \varphi\rangle = 0$, c-à-d $(\partial^\alpha \varphi)(0) = 0$ pour tout $|\alpha| \leq N$. Nous devons montrer que $\langle T, \varphi\rangle = 0$.

Fixons une fonction $\eta$ de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ avec $\eta(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$ et $\eta(x) = 0$ pour $|x| \geq 2$. Posons $\eta_\varepsilon(x) = \eta(x/\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Alors $(\eta_\varepsilon \varphi)(x) = \varphi(x)$ pour $|x| \leq \varepsilon$ et $(\eta_\varepsilon \varphi)(x) = 0$ pour $|x| \geq 2\varepsilon$. En particulier, $\operatorname{supp}(\eta_\varepsilon \varphi - \varphi) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et donc $\langle T, \eta_\varepsilon \varphi - \varphi\rangle = 0$, c-à-d $\langle T, \eta_\varepsilon \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$. Il suffira donc de montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0} \langle T, \eta_\varepsilon \varphi\rangle = 0$.

Comme $|\langle T, \eta_\varepsilon \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq N, |\beta|\leq m} \rho_{\alpha\beta}(\eta_\varepsilon \varphi)$, il suffit de montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \rho_{\alpha\beta}(\eta_\varepsilon \varphi) = 0, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq N.$$

On a $(\partial^\alpha \varphi)(0) = 0$ pour tout $|\alpha| \leq N$; la formule de Taylor pour $\partial^\alpha \varphi$ montre alors qu'il existe $K > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$(*) \qquad |\partial^\alpha \varphi(x)| \leq K |x|^{N+1-|\alpha|}, \qquad \forall |x| \leq 2\varepsilon_0 \text{ et } |\alpha| \leq N.$$

D'autre part, par la formule de Leibniz, on a

$$\partial^\alpha (\eta_\varepsilon \varphi)(x) = \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (\partial^{\alpha-\gamma}\eta)(x/\varepsilon)(\partial^\gamma \varphi)(x) \varepsilon^{|\gamma|-|\alpha|}.$$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \leq N$. Posons $\|\eta\|_N := \sup_{|\gamma|\leq N} \|\partial^\gamma \eta\|_\infty$. Alors, pour tout $\varepsilon < \min\{1/2, \varepsilon_0\}$, on a, en utilisant $(*)$:

$$
\begin{aligned}
\rho_{\alpha\beta}(\eta_\varepsilon\varphi) &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta(\partial^\alpha(\eta_\varepsilon\varphi))(x)| = \sup_{|x|\leq 2\varepsilon} |x^\beta(\partial^\alpha(\eta_\varepsilon\varphi))(x)| \\
&\leq \sup_{|x|\leq 2\varepsilon} |(\partial^\alpha(\eta_\varepsilon\varphi))(x)| \\
&\leq \sup_{|x|\leq 2\varepsilon} \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \varepsilon^{|\gamma|-|\alpha|} |(\partial^{\alpha-\gamma}\eta)(x/\varepsilon)(\partial^\gamma\varphi)(x)| \\
&\leq \|\eta\|_N \sup_{|x|\leq 2\varepsilon} \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \varepsilon^{|\gamma|-|\alpha|} |(\partial^\gamma\varphi)(x)| \\
&\leq K\|\eta\|_N \sup_{|x|\leq 2\varepsilon} \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \varepsilon^{|\gamma|-|\alpha|} |x|^{N+1-|\gamma|} \\
&\leq K\|\eta\|_N \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \varepsilon^{|\gamma|-|\alpha|} (2\varepsilon)^{N+1-|\gamma|} \\
&\leq 2\varepsilon K\|\eta\|_N \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} 2^{N-|\gamma|}\varepsilon^{N-|\alpha|} \leq 2\varepsilon K\|\eta\|_N \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (2\varepsilon)^{N-|\gamma|} \\
&\leq 2\varepsilon K\|\eta\|_N \sum_{\gamma\leq\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \leq \varepsilon K'\|\eta\|_N,
\end{aligned}
$$

où $K'$ est une constante dépendant seulement de $N$ et $n$. On a donc $\lim_{\varepsilon\to 0} \rho_{\alpha\beta}(\eta_\varepsilon\varphi) = 0$. ■

**Lemme 6** *Soient $V$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des formes linéaires sur $V$ telles que $\bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(\varphi_i) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i\varphi_i$.*

**Preuve** On considère l'application linéaire $\Phi : V \to \mathbb{K}^n$ définie par $\Phi(v) = (\varphi_1(v), \ldots, \varphi_n(v))$ pour tout $v \in V$. Alors $\mathrm{Ker}(\Phi) = \bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ On définit une forme linéaire $L : \mathrm{Image}(\Phi) \to \mathbb{K}$ par $L(\Phi(v)) = \varphi(v)$. Cette application est bien définie car $\mathrm{Ker}(\Phi) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$, par l'hypothèse sur $\varphi$. On étend $L$ (de manière arbitraire) en une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$, notée également $L$. Il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $L(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On a alors, pour tout $v \in V$,

$$\varphi(v) = L(\Phi(v)) = L(\varphi_1(v), \ldots, \varphi_n(v)) = a_1\varphi_1(v) + \cdots + a_n\varphi_n(v),$$

c-à-d $\varphi = a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n$. ■