

L3—PS—Feuille de TD 7

Exercice 1. Soient X et Y deux v.a.r indépendantes suivant toutes les deux une loi de Bernoulli de paramètre p . On note $S = X + Y$ et $D = X - Y$. Déterminer les lois de S et D ainsi que leurs espérances et variances. Calculer $\mathbf{E}[SD]$. Les variables S et D sont-elles indépendantes ?

Exercice 2. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires avec $X(\Omega) = \{-1, 1\}$, $Y(\Omega) = \{1, 2\}$. On suppose que $\mathbf{P}(X = -1) = 1/4$ et $\mathbf{P}(Y = 1) = 1/3$ et on pose

$$p = \mathbf{P}(X = -1, Y = 1).$$

- (i) Exprimer en fonction de p la loi conjointe de X et Y et présenter le résultat sous forme d'un tableau.
- (ii) Quelles conditions doit-on imposer à p ?
- (iii) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$ en fonction de p .
- (iv) Déterminer p pour que X et Y soient indépendantes.

Exercice 3. (*) Soient X et Y deux v.a.r indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et suivant des lois géométriques de paramètres p_1 et p_2 . On considère la matrice aléatoire

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix},$$

c-à-d l'application $\Omega \rightarrow M_2(\mathbf{R})$ définie par $A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ 0 & Y(\omega) \end{pmatrix}$ pour tout $\omega \in \Omega$.

- (i) Déterminer l'évènement "A est diagonalisable" en fonction de X et Y .
- (ii) Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire continue de densité f , donnée pour tout $x \in \mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{ax}{1+x^2} \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, où a est un nombre réel.

- (i) Déterminer a .
- (ii) Calculer les probabilités $\mathbf{P}(X = 0, 3)$ et $\mathbf{P}(-1 < X \leq 1/2)$.

Exercice 5. Soit X une v.a.r de densité $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = ae^{-|x|}$ pour $x \in \mathbf{R}$.

- (i) Déterminer a .
- (ii) Calculer la fonction de répartition F_X de X .

(iii) Montrer que $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{Var}(X)$ existent et les calculer.

Exercice 6. Soit a est un nombre réel et X une v.a.r continue de densité f , définie par $f(x) = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in [0, 1[$ et $f(x) = 0$ sinon.

- (i) Déterminer a .
- (ii) Montrer que X possède une espérance et la calculer.
- (iii) Soit $Y = \arcsin(X)$. Déterminer la loi de Y et la reconnaître.

Exercice 7. Soit a est un nombre réel et X une v.a.r continue de densité f définie par $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbf{R}$.

- (i) Déterminer a .
- (ii) Calculer la fonction de répartition F_X de X .
- (iii) Montrer que X ne possède pas d'espérance.

Exercice 8. Soit X une v.a.r suivant une loi exponentielle de paramètre λ . Déterminer la loi de la partie entière $[X]$ de X .

Exercice 9. (*) On dit qu'une v.a.r X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est sans mémoire si $\mathbf{P}(X > s) > 0$ et $\mathbf{P}(X > t + s | X > s) = \mathbf{P}(X > t)$ pour tous $t, s \geq 0$.

- (i) Soit X une v.a.r de loi exponentielle. Montrer que X est sans mémoire.
- (ii) Soit X une v.a.r X à valeurs dans \mathbf{R}_+^* , à densité et sans mémoire. Montrer que X suit une loi exponentielle. (Indication : on pourra considérer la fonction continue h définie sur \mathbf{R} par $h(x) = \log(\mathbf{P}(X > x))$.)