**Université de Rennes 1–Année 2023/2024**

**L3—PS–Feuille de TD 7**

**Exercice 1.** Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires avec $X(\Omega) = \{-1, 1\}, Y(\Omega) = \{1, 2\}$. On suppose que $\mathbf{P}(X = -1) = 1/4$ et $\mathbf{P}(Y = 1) = 1/3$ et on pose $p = \mathbf{P}(X = -1, Y = 1)$.
(i) Exprimer en fonction de $p$ la loi conjointe de $X$ et $Y$ et présenter le résultat sous forme d'un tableau.
(ii) Quelles conditions doit-on imposer à $p$?
(iii) Déterminer $p$ pour que $X$ et $Y$ soient indépendantes.
(iv) Calculer $\mathbf{E}(XY)$ quand $p$ est comme dans (iii).

**Exercice 2.** Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r qui suivent des lois de Bernoulli, de paramètres $1/2$ et $1/3$ respectivement. On pose $p := \mathbf{P}(X = 1, Y = 1)$.
(i) Déterminer la loi conjointe de $(X, Y)$ en fonction de $p$ et présenter le résultat sous forme de tableau. Quelle condition doit satisfaire $p$?
(ii) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$ en fonction de $p$.

**Exercice 3.** Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \dfrac{a}{i!j!}$ pour tout $(i, j) \in \mathbf{N}^2$.
(i) Déterminer la valeur de $a$.
(ii) Quelles sont les lois marginales de $X$ et de $Y$?
(iii) $X$ et $Y$ sont elles indépendantes ?

**Exercice 4. (*)** Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et suivant des lois géométriques de paramètres $p_1$ et $p_2$. On considère la matrice aléatoire

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix},$$

c-à-d l'application $\Omega \to M_2(\mathbf{R})$ définie par $A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ 0 & Y(\omega) \end{pmatrix}$ pour tout $\omega \in \Omega$.
(i) Déterminer l'évènement "$A$ est diagonalisable" en fonction de $X$ et $Y$.
(ii) Quelle est la probabilité que $A$ soit diagonalisable ?

**Exercice 5.** Soit $X$ une v.a.r de densité $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = ae^{-|x|}$ pour $x \in \mathbf{R}$.
(i) Déterminer $a$.
(ii) Calculer la fonction de répartition $F_X$ de $X$.
(iii) Montrer que $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{Var}(X)$ existent et les calculer.

**Exercice 6.** Soit $a$ est un nombre réel et $X$ une variable aléatoire de densité

$$x \mapsto f(x) = axe^{-x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x),$$

(i) Déterminer $a$.
(ii) Calculer les probabilités $\mathbf{P}(X \in \{0,1\})$, $\mathbf{P}(X \leq 0)$ et $\mathbf{P}(-2 < X < 2)$.
(iii) Calculer l'espérance de $X$.
(iv)Soit $Y = 1/X$. Déterminer la fonction de répartition ainsi que la densité de $Y$.

**Exercice 7.** Soit $a$ est un nombre réel et $X$ une variable aléatoire continue de densité $f$, définie par $f(x) = \dfrac{a}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in [0,1[$ et $f(x) = 0$ sinon.
(i) Déterminer $a$.
(ii) Montrer que $X$ possède une espérance et la calculer.
(iii) Soit $Y = \arcsin(X)$. Déterminer la loi de $Y$ et la reconnaître.

**Exercice 8.** Soit $a$ est un nombre réel et $X$ une variable aléatoire continue de densité $f$ définie par $f(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbf{R}$.
(i) Déterminer $a$.
(ii) Calculer la fonction de répartition $F_X$ de $X$.
(iii) Montrer que $X$ ne possède pas d'espérance.

**Exercice 9.** On dit qu'une v.a.r $X$ sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est sans mémoire si $\mathbf{P}(X > s) > 0$ et $\mathbf{P}(X > t + s | X > s) = \mathbf{P}(X > t)$ pour tous $t, s \geq 0$.
(i) Soit $X$ une v.a.r de loi exponentielle. Montrer que $X$ est sans mémoire.
(ii) **(*)** Soit $X$ une v.a.r $X$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ , à densité et sans mémoire. Montrer que $X$ suit une loi exponentielle. (Indication : on pourra considérer la fonction continue $h$ définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = \log(\mathbf{P}(X > x))$.)