Université de Rennes 1–Année 2024/2025

L3—PS–Feuille de TD 6

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{F}$. Soit $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de A. Montrer que $\mathbf{1}_A$ est une v.a.r. sur Ω et calculer son espérance. Quelle est la loi de $\mathbf{1}_A$?

Exercice 2. Soit X une v.a.r suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Soit $\lambda \geq 0$. Montrer que la v.a.r. $e^{-\lambda X}$ possède une espérance et la calculer.

Exercice 3. Calculer $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$ pour une v.a.r X suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 4. Soient X et Y deux v.a.r indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Déterminer la loi de la v.a.r $Z = X+Y$ dans les deux cas suivants :
(i) X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ respectivement ;
(ii) X et Y suivent toutes deux une même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Exercice 5. Une marque de céréales offre, dans chaque paquet, un autocollant. La collection comporte n autocollants différents, dont des exemplaires sont uniformément répartis sur l'ensemble des paquets. Un collectionneur achète chaque semaine un paquet. Pour tout $k \in \mathbf{N}, 1 \leq k \leq n$, on note X_k le nombre de semaines qui lui sont nécessaires pour obtenir la première fois k autocollants différents. La collection est donc complète après X_n semaines.
(i) Quel est l'ensemble des valeurs de X_1 et de X_k pour $k \geq 2$.
(ii) On pose $T_k = X_k - X_{k-1}$ pour $k \in \mathbf{N}, 1 \leq k \leq n$, en convenant que $X_0 = 0$. Quelle est la signification de T_k?
(iii) Calculer $\mathbf{P}(T_k = i | T_{k-1} = j)$, pour tous $i, j \in \mathbf{N}^*$.
(iv) Déterminer la loi de T_k et la reconnaître.
(v) Déterminer l'espérance $\mathbf{E}(X_n)$ de X_n.
(vi)(*) Donner un équivalent de $\mathbf{E}(X_n)$ pour $n \to +\infty$.

Exercice 6. Soient X et Y deux v.a.r qui suivent des lois de Bernoulli, de paramètres $1/2$ et $1/3$ respectivement. On pose $a := \mathbf{P}(X = 1, Y = 1)$.
(i) Déterminer la loi conjointe de (X, Y) en fonction de a et présenter le résultat sous forme de tableau.
(ii) Identifier la loi de XY.
(iii) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$ en fonction de a.
(iv) On suppose que X et Y sont non corrélées. Montrer que X et Y sont indépendantes.