

L3—PS—Feuille de TD 6

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et soit $A \in \mathbf{F}$. Soit $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de A . Montrer que $\mathbf{1}_A$ est une v.a.r. sur Ω et calculer son espérance. Quelle est la loi de $\mathbf{1}_A$?

Exercice 2. Soit X un v.a.r suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Soit $\lambda \geq 0$. Montrer que la v.a.r. $e^{-\lambda X}$ possède une espérance et la calculer.

Exercice 3. Soient X et Y deux v.a.r indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Déterminer la loi de la v.a.r $Z = X + Y$ dans les deux cas suivants :
(i) X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ respectivement ;
(ii) X et Y suivent toutes deux une même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Exercice 4. Une marque de céréales offre, dans chaque paquet, un autocollant. La collection comporte n autocollants différents, dont des exemplaires sont uniformément répartis sur l'ensemble des paquets. Un collectionneur achète chaque semaine un paquet. Pour tout $k \in \mathbf{N}, 1 \leq k \leq n$, on note X_k le nombre de semaines qui lui sont nécessaires pour obtenir la première fois k autocollants différents. La collection est donc complète après X_n semaines.
(i) Quel est l'ensemble des valeurs de X_1 et de X_k pour $k \geq 2$.
(ii) On pose $T_k = X_k - X_{k-1}$ pour $k \in \mathbf{N}, 1 \leq k \leq n$, en convenant que $X_0 = 0$. Quelle est la signification de T_k ?
(iii) Calculer $\mathbf{P}(T_k = i | T_{k-1} = j)$, pour tous $i, j \in \mathbf{N}^*$.
(iv) Déterminer la loi de T_k et la reconnaître.
(v) Déterminer l'espérance $\mathbf{E}(X_n)$ de X_n .
(vi)(*) Donner un équivalent de $\mathbf{E}(X_n)$ pour $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 5. Soient X et Y deux v. a. r indépendantes toutes une même loi de Bernoulli de paramètre p . On considère les v.a.r. $S = X + Y$ et $D = X - Y$.
(i) Déterminer les loi de S et D ainsi que leurs espérances et variances.
(ii) Calculer $\mathbf{E}[SD]$.
(iii) Les variables S et D sont-elles indépendantes?

Exercice 6. Soient a, b deux nombres réels avec $a \neq b, a \neq -b$ et $a, b \notin \{0, \pm 1\}$; soit X une v. a. r. de loi uniforme sur $\{-a, a, b, -b\}$ et $Y = X^2$.
(i) Calculer les variances de X, Y et $X + Y$ respectivement.
(ii) Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 7. (*) Soient X_1, X_2 des v.a.r. indépendantes suivant toutes deux une même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On considère les v.a.r. $Y = \max\{X_1, X_2\}$ et $Z = \min\{X_1, X_2\}$.
(i) Déterminer les fonctions de répartition de X et Y .
(ii) Déterminer les lois de X et Y .