Université de Rennes 1–Année 2024/2025

L3–PS-Probabilités et Statistique

Feuille de TD 4

Exercice 1. Une urne contient 5 boules numérotées, dont 3 sont blanches et 2 noires. Un joueur tire successivement, avec remise, 3 boules dans cette urne.
(i) Décrire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ modélisant cette expérience aléatoire.

Pour chaque boule blanche tirée, le joueur gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points. Soit X le nombre de boules blanches tirées et Y le nombre de points obtenus.
(ii) Identifier la loi de X.
(iii) Exprimer Y en fonction de X et déterminer sa loi.

Exercice 2. On dispose de trois urnes et de trois boules. On place chacune des boules au hasard dans l'une des urnes. Soit X la v.a.r égale au nombre d'urnes qui ne sont pas vides. Déterminer la loi de X.

Exercice 3. Un trousseau de n clefs contient une seule clef ouvrant une serrure donnée. On les essaie l'une après l'autre au hasard. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires pour obtenir la bonne clé.
(i) On essaie à chaque fois une clef au hasard sans avoir écarté la précédente. Déterminer la loi de X.
(ii) On essaie à chaque fois une clef au hasard après avoir écarté la précédente. Déterminer la loi de X.
(Indication : pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\mathbf{P}(X = i) = \mathbf{P}(X = i | X > i - 1\}\mathbf{P}(X > i - 1)$.)

Exercice 4. Un joueur jette simultanément deux dés. A l'issue du jeu, il gagne une somme X égale à la différence entre le plus grand et le plus petit des points marqués.

Déterminer la loi de la v.a.r X ainsi que sa fonction de répartition F_X. Tracer le graphe de F_X.

Exercice 5. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et X une v.a.r. sur Ω à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose qu'il existe $q \in]0, 1[$ tel que

$$\mathbf{P}(X = n) = q\mathbf{P}(X \geq n) \qquad \text{pour tout} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Déterminer la loi de X.

Exercice 6. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A, B \subset \mathcal{F}$ deux évènements. On considère la v.a.r. X sur Ω définie par $X(\omega) = 1$ si ω réalise un et un seul des évènements A ou B et $X(\omega) = 0$ sinon. On pose $p_1 = \mathbf{P}(A)$, $p_2 = \mathbf{P}(B)$, $p_3 = \mathbf{P}(A \cap B)$.

Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance, en fonction de p_1, p_2, p_3. En déduire les inégalités

$$\frac{p_1 + p_2 - 1}{2} \leq p_3 \leq \frac{p_1 + p_2}{2}.$$

et étudier les cas d'égalité.

Exercice 7. (*) Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des évènements mutuellement indépendants dans $\mathcal{F}$.
(i) Soit i avec $1 \leq i \leq n$. Montrer que $A_1, \ldots A_{i-1}, A_i^c, A_{i+1}, \ldots A_n$ sont mutuellement indépendants.
(ii) Montrer que $A_1^c, A_2^c, \ldots A_n^c$ sont mutuellement indépendants.
(iii) Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne soit réalisé est inférieure à $\exp(-\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i))$. (Indication : utiliser l'inégalité $1 - x \leq e^{-x}$ pour tout $x > 0$.)

Exercice 8. (*) Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'évènements dans $\mathcal{F}$. Pour la définition des évènements $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$, voir feuille de TD 2.
(i) On suppose que la série $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(A_n)$ est convergente. Montrer que $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0$.
(ii) On suppose que les évènements A_n sont mutuellement indépendants et que la série $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(A_n)$ est divergente. Montrer que $\mathbf{P}(\liminf A_n^c) = 0$ et donc $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 1$. (Indication : utiliser le point (iii) de l'exercice précédent).