Université de Rennes 1–Année 2024/2025

L3–PS-Probabilités et Statistique

Feuille de TD 3

Exercice 1. Dans d'un jeu 32 cartes, comportant quatre couleurs ("pique", "trèfle", etc) formées de 8 cartes chacune, on tire 3 cartes au hasard.

(1) Décrire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ modélisant cette expérience aléatoire quand on tire les cartes simultanément.

(2) Décrire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ modélisant cette expérience aléatoire, quand on tire les cartes l'une après l'autre en les remettant après chaque tirage dans le jeu.

(3) Quelle est la probabilité que les 3 cartes soient de la même couleur dans chacun des cas (1) et (2).

Exercice 2. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.
(i) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un évènement $A \in \mathcal{F}$ soit indépendant avec lui-même.
(ii) Soient $A, B \in \mathcal{F}$ des évènements indépendants. Montrer que A^c et B ainsi que A^c et B^c sont indépendants.

Exercice 3. Deux médicaments sont testés sur des patients atteints d'une certaine maladie. Trois patients sur cinq prennent un médicament X et deux sur cinq prennent un médicament alternatif Y. Il y a une amélioration de l'état de santé pour 75% des patients traités avec le médicament X, contre 90% avec le médicament Y.
(i) Calculer la probabilité de prendre le médicament Y et d'avoir une amélioration de son état de santé.
(ii) Calculer la probabilité pour un patient d'avoir pris le médicament X sachant que son état de santé s'est amélioré.

Exercice 4. Dans un pays, la proportion de personnes vaccinées contre une certaine maladie est de 80% et 90% des admissions à l'hôpital en raison de cette maladie concernent des personnes non-vaccinées. On note H l'événement « être hospitalisé » et V « être vacciné » (pour un individu tiré au hasard dans la population). Calculer le rapport $\dfrac{\mathbf{P}(H|V^c)}{\mathbf{P}(H|V)}$ des risques d'hospitalisation.

Exercice 5. (*) Votre voisin oublie fréquemment ses clés. Pour tout $n \geq 1$, soit p_n la probabilité qu'il oublie ses clés le jour n. On suppose que $p_1 = a$ est connu et que si le jour n il oublie ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $1/10$; si le jour n il n'oublie pas ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $4/10$.
(i) Etablir une formule de récurrence reliant p_{n+1} et p_n pour $n \geq 1$.
(ii) Déterminer p_n pour tout $n \geq 1$.