Université de Rennes 1–Année 2023/2024
L3–PS-Probabilités et Statistique

Feuille de TD 3

Exercice 1. Reprendre l'Exercise 7 de la feuille de TD 1 en supposant cette fois que les boules ne sont pas remises dans l'urne après tirage.

Exercice 2. Dans d'un jeu 32 cartes, comportant quatre couleurs ("pique", "trèfle", etc) formées de 8 cartes chacune, on tire 3 cartes au hasard.

(1) Décrire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ modélisant cette expérience aléatoire quand on tire les cartes simultanément.
(2) Décrire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ modélisant cette expérience aléatoire, quand on tire les cartes l'une après l'autre en les remettant après chaque tirage dans le jeu.
(3) Quelle est la probabilité que les 3 cartes soient de la même couleur dans chacun des cas (1) et (2).

Exercice 3. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé.
(i) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un évènement $A \in \mathcal{F}$ soit indépendant avec lui-même.
(ii) Soient $A, B \in \mathcal{F}$ tels que $\mathbf{P}(A) > 0, \mathbf{P}(B) > 0$ et $A \cap B = \emptyset$. Montrer que A et B ne sont pas indépendants.
(iii) Soient $A, B \in \mathcal{F}$ des évènements indépendants. Montrer que A^c et B ainsi que A^c et B^c sont indépendants.

Exercice 4. Une assemblée comporte 60 % de femmes ; une femme sur trois dans cette assemblée porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes. Quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

Exercice 5. Deux médicaments sont testés sur des patients atteints d'une certaine maladie. Trois patients sur cinq prennent un médicament X et deux sur cinq prennent un médicament alternatif Y. Il y a une amélioration de l'état de santé pour 75% des patients traités avec le médicament X, contre 90% avec le médicament Y.
(i) Calculer la probabilité de prendre le médicament Y et d'avoir une amélioration de son état de santé.
(ii) Calculer la probabilité pour un patient d'avoir pris le médicament X sachant que son état de santé s'est amélioré.

Exercice 6. Deux joueurs J_1 et J_2 s'exercent au tir à l'arc. Le joueur J_1 ne tire qu'une fois sur 3 et atteint sa cible 9 fois sur 10 quand il tire.

Le joueur J_2, moins adroit, n'atteint sa cible que 6 fois sur 10. Un des joueurs tire.
(i) Quelle est la probabilité pour que la cible soit atteinte ?
(ii) Sachant que la cible est atteinte, quelle est la probabilité pour que ce soit par J_1?

Exercice 7. Dans un étang, il y a des poissons rouges et des poissons verts. Les poissons trop petits sont remis à l'eau par les pêcheurs. On estime qu'il y a 60 % de poissons rouges dans l'étang, que la moitié des poissons rouges et le tiers des poissons verts sont trop petits.
(i) Quelle est la probabilité de pêcher un poisson trop petit ?
(ii) Sachant qu'on a pêché un poisson trop petit, quelle est la probabilité que ce soit un poisson rouge ?

Exercice 8. Dans un pays, la proportion de personnes vaccinées contre une certaine maladie est de 80% et 90% des admissions à l'hôpital en raison de cette maladie concernent des personnes non-vaccinées. On note H l'événement « être hospitalisé » et V « être vacciné » (pour un individu tiré au hasard dans la population). Calculer le rapport $\dfrac{\mathbf{P}(H|V^c)}{\mathbf{P}(H|V)}$ des risques d'hospitalisation.

Exercice 9. (*) On considère $n \geq 1$ individus $A_1, \ldots, A_n$. On lance une pièce de monnaie et on transmet le résultat ("Pile" ou "Face") à A_1. Le résultat est transmis par A_1 à A_2, ensuite par A_2 à A_3, etc. On suppose que tous ces individus mentent avec la probabilité p et qu'ils le font de manière mutuellement indépendante. Soit p_n la probabilité que le résultat reçu par A_n soit le bon.
(i) Etablir une formule de récurrence reliant p_{n+1} et p_n pour $n \geq 1$.
(ii) Calculer p_n.
(iii) Quelle est la limite $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$?

Exercice 10. (*) Votre voisin oublie fréquemment ses clés. Pour tout $n \geq 1$, soit p_n la probabilité qu'il oublie ses clés le jour n. On suppose que $p_1 = a$ est connu et que si le jour n il oublie ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $1/10$; si le jour n il n'oublie pas ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $4/10$.
(i) Etablir une formule de récurrence reliant p_{n+1} et p_n pour $n \geq 1$.
(ii) Déterminer p_n pour tout $n \geq 1$.